Applications

Exercice 6.
On pourra admettre que $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 8.
La condition nécessaire et suffisante attendue pour l'injectivité de ψ est $X \cup Y = \Omega$.

Exercice 12.
La question sur la parité est un (petit) piège. Commencer par tenter de dessiner un graphe de fonction paire bijective...

Exercice 27.
On pourra se convaincre que $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est l'ensemble des réels qui appartiennent à tous les $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang, alors que $\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est l'ensemble des réels qui appartiennent à une infinité de $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cela permettra, notamment pour les deux exemples, de formuler des conjectures que l'on démontrera à l'aide des canevas de preuve standard.

Exercice 28.
On pourra montrer l'inclusion réciproque par contraposée (qu'est-ce que cela signifie, au juste ?).

Autocorrection

Autocorrection A.

1. - Montrons que l'application f est injective.
     Soit $x, x' \in \mathbb{N}$ tels que $f(x) = f(x')$.
     On a donc $2x = 2x'$. En divisant de part et d'autre par 2, on a bien $x = x'$.
   - En revanche, f n'est pas surjective. En effet, quel que soit $x \in \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$ est un entier pair, donc $1 \in \mathbb{N}$ n'est pas une valeur prise par la fonction f.
2. - L'application g n'est pas injective. En effet, $g(2) = g(1) = 1$.
   - Montrons que l'application g est surjective. Soit $y \in \mathbb{N}$.
     (i) Si y est impair, on a $g(y) = y$.
     (ii) Si y est pair, on a $g(2y) = y$.
     Dans tous les cas, on a $\exists x \in \mathbb{N} : g(x) = y$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   - On a $(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(2n) = n$ car $2n$ est pair. Ainsi, $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
     Cette application est bijective.
   - Si n est pair, $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f\left(\dfrac{n}{2}\right) = n$.
     Si n est impair, $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n) = 2n$.

Ainsi, on a

$$f \circ g : \begin{cases} \mathbb{N} \to & \mathbb{N} \\ n \mapsto & \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{cases}$$

Cette application n'est ni injective ni surjective. On peut le voir de deux façons.

(i) Si $f \circ g$ était injective, g serait injective. Si $f \circ g$ était surjective, f serait surjective. Comme on a vu aux deux premières questions qu'il n'en était rien, $f \circ g$ n'est ni injective ni surjective.

(ii) Montrons les mêmes résultats à la main.
Déjà, l'expression de $f \circ g$ montre que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $(f \circ g)(n)$ est pair. On ne peut donc pas trouver de $n \in \mathbb{N}$ tel que $(f \circ g)(n) = 1$. Ainsi, $f \circ g$ n'est pas surjective.
Par ailleurs, $(f \circ g)(1) = (f \circ g)(2) = 2$, donc $f \circ g$ n'est pas injective.

Autocorrection B.

1. L'application f est injective. Pour le montrer, nous allons montrer

$$\forall x, x' \in \mathbb{N}, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

par contraposée, c'est-à-dire que nous allons montrer

$$\forall x, x' \in \mathbb{N}, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

Soit $x, x' \in \mathbb{N}$ tels que $x \neq x'$.

- Si $x > x'$, la stricte croissance de f entraîne $f(x) > f(x')$.
- Si $x' > x$, la stricte croissance de f entraîne $f(x') > f(x)$.

Dans tous les cas, nous avons bien $f(x) \neq f(x')$.

Remarque. Nous avons en fait démontré un résultat plus général, à savoir que toute application strictement croissante est injective.

En revanche, f n'est pas surjective. En effet, on a $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $\forall n \geqslant 2, f(n) \geqslant 4$, donc il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = 3$.

2. D'après ce qui précède, il n'existe pas d'application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. En effet, puisque $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ est surjectif, cela entraînerait la surjectivité de f, que nous avons exclue.
Par ailleurs, considérons

$$h : \begin{cases} \mathbb{N} \to & \mathbb{N} \\ n \mapsto & \begin{cases} \sqrt{n} & \text{si } n \text{ est un carré parfait} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Il s'agit d'une application bien définie ($\sqrt{n}$ est bien un élément de $\mathbb{N}$ dès que n est un carré parfait). La composée $h \circ f$ est alors bien une application $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} (h \circ f)(n) &= h\left(f(n)\right) \\ &= h(n^2) \\ &= \sqrt{n^2} && \text{car } n^2 \text{ est un carré parfait} \\ &= n && \text{car } n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $h \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

Autocorrection C.

1. ▶ Supposons $A \subseteq B$.
   Soit $x \in f^{-1}[A]$. Par définition, cela signifie que $f(x) \in A$.
   Comme $A \subseteq B$, on a $f(x) \in B$, donc $x \in f^{-1}[B]$.
   On a donc bien montré $f^{-1}[A] \subseteq f^{-1}[B]$.

   ▶ Procédons par double inclusion.

   Sens direct. Soit $x \in f^{-1}[A \cup B]$. Cela signifie que $f(x) \in A \cup B$. Distinguons deux cas.
   - Si $f(x) \in A$, on a $x \in f^{-1}[A]$.
   - Si $f(x) \in B$, on a $x \in f^{-1}[B]$.

   Dans tous les cas, on a donc bien $x \in f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$.
   Cela démontre l'inclusion $f^{-1}[A \cup B] \subseteq f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$.

   Sens réciproque. Réciproquement, soit $x \in f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$. Distinguons deux cas.
   - Si $x \in f^{-1}[A]$, on a $f(x) \in A$, donc $f(x) \in A \cup B$, donc $x \in f^{-1}[A \cup B]$.
   - On montre de même que si $x \in f^{-1}[B]$, alors $x \in f^{-1}[A \cup B]$.

   Cela démontre l'inclusion $f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B] \subseteq f^{-1}[A \cup B]$.

   ▶ On procède par double inclusion.

   Sens direct. Soit $x \in f^{-1}[A \cap B]$.
   On a donc $f(x) \in A \cap B$, donc $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$, donc $x \in f^{-1}[A]$ et $x \in f^{-1}[B]$, ce qui entraîne $x \in f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$.

   Sens réciproque. Soit $x \in f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$.
   On a donc $x \in f^{-1}[A]$ et $x \in f^{-1}[B]$, donc $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$, donc $f(x) \in A \cap B$, donc $x \in f^{-1}[A \cap B]$.

2. ▶ Supposons $C \subseteq D$.
   Soit $y \in f[C]$. On peut donc trouver $x \in C$ tel que $f(x) = y$.
   Comme $C \subseteq D$, on a $x \in D$, donc $y = f(x) \in f[D]$.
   Cela montre l'inclusion $f[C] \subseteq f[D]$.

   ▶ Procédons par double inclusion.

   Sens direct. Soit $y \in f[C \cup D]$. On peut donc trouver $x \in C \cup D$ tel que $y = f(x)$. Distinguons deux cas.
   - Si $x \in C$, on a $y = f(x) \in f[C]$.
   - Si $x \in D$, on a $y = f(x) \in f[D]$.

   Dans tous les cas, on a donc $y \in f[C] \cup f[D]$.
   Cela démontre l'inclusion $f[C \cup D] \subseteq f[C] \cup f[D]$.

   Sens réciproque. Réciproquement, soit $y \in f[C] \cup f[D]$. Distinguons deux cas.
   - Si $y \in f[C]$, on peut trouver $x \in C$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in C \cup D$, on a $y = f(x) \in f[C \cup D]$.
   - Si $y \in f[D]$, on peut trouver $x \in D$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in C \cup D$, on a $y = f(x) \in f[C \cup D]$.

   Dans tous les cas, on a donc $y \in f[C \cup D]$.
   Cela démontre l'inclusion $f[C] \cup f[D] \subseteq f[C \cup D]$.

   ▶ Soit $x \in f[C \cap D]$. On peut donc trouver $x \in C \cap D$ tel que $y = f(x)$.
   Comme $x \in C$, on a $y = f(x) \in f[C]$. Comme $x \in D$, on a $y = f(x) \in f[D]$.
   On a donc bien $y \in f[C] \cap f[D]$.
   Cela démontre l'inclusion $f[C \cap D] \subseteq f[C] \cap f[D]$.

► Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{cases}$ la fonction nulle. On a

$$f[\mathbb{R}_+^*] \cap f[\mathbb{R}_-^*] = \{0\} \cap \{0\} = \{0\} \quad \text{mais} \quad f[\mathbb{R}_+^* \cap \mathbb{R}_-^*] = f[\varnothing] = \varnothing,$$

ce qui montre que l'inclusion ci-dessus peut ne pas être une égalité.

Autocorrection D.

1. Les deux termes de l'égalité sont des parties de $\mathbb{R}$. Montrons qu'elles sont égales par double inclusion.

   ► Soit $y \in \bigcup_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[$.
   On peut trouver $x \in [0,1]$ tel que $y \in]x-1, x+1[$.
   On a alors
   - d'une part : $y < x+1 \leqslant 2$;
   - de l'autre : $y > x-1 \geqslant -1$,

   donc $y \in]-1, 2[$.

   ► Réciproquement, soit $y \in]-1,2[$.
   On distingue deux cas :
   - si $y \in]-1,1[$, on a $y \in]0-1, 0+1[$, donc $y \in \bigcup_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[$;
   - si $y \in]0,2[$, on a $y \in]1-1, 1+1[$, donc $y \in \bigcup_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[$.

   Comme ces deux cas recouvrent toutes les possibilités (car $]-1,1[\cup]0,2[=]-1,2[$), on a montré l'inclusion réciproque, ce qui conclut la preuve.

2. On procède de la même façon pour montrer que $\bigcap_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[=]0,1[$.

   ► Soit $y \in \bigcap_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[$.
   On a donc en particulier $y \in]0-1, 0+1[=]-1,1[$ et $y \in]1-1, 1+1[=]0,2[$. Cela entraîne à la fois $0 < y$ et $y < 1$, donc $y \in]0,1[$.

   ► Réciproquement, soit $y \in]0,1[$.
   Montrons $y \in \bigcap_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[$, c'est-à-dire $\forall x \in [0,1], y \in]x-1, x+1[$.
   Soit $x \in [0,1]$.
   - On a $x \leqslant 1$, donc $x-1 \leqslant 0$, donc $y > x-1$.
   - De même, on a $x \geqslant 0$, donc $x+1 \geqslant 1$, donc $y < x+1$.

   Ainsi, $y \in]x-1, x+1[$.
   Cela montre $y \in \bigcap_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[$ et conclut la preuve.

Autocorrection E.

- On procède par double inclusion.

  Sens direct. Soit $x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B$.

  Comme $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, on peut trouver $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$.
  Comme en outre $x \in B$, on en déduit $x \in A_{i_0} \cap B$.
  Cela montre que $x \in \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$.

  Sens réciproque. Soit $x \in \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$.

  On peut donc trouver $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0} \cap B$.
  Comme $x \in A_{i_0}$, on a $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$.
  Comme en outre $x \in B$, on en déduit $x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B$.

- Proposons deux méthodes.

  Par double inclusion.

  Sens direct. Soit $x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B$.

  Montrons $x \in \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B)$, c'est-à-dire $\forall i \in I, x \in A_i \cup B$.

  Soit $i \in I$. Comme $x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B$, on distingue deux cas.

  - Si $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$, on a notamment $x \in A_i$. En particulier, $x \in A_i \cup B$.
  - Si $x \in B$, on a évidemment $x \in A_i \cup B$.

  Cela conclut.

  Sens réciproque. Soit $x \in \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B)$.

  Montrons $x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B$, c'est-à-dire $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ ou $x \in B$. On va en fait montrer l'assertion équivalente $x \notin B \Rightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i$.
  Supposons donc $x \notin B$ et montrons $\forall i \in I, x \in A_i$. Soit $i \in I$.
  On sait notamment que $x \in A_i \cup B$. Comme en outre $x \notin B$, on a bien $x \in A_i$, ce qui conclut.

  Par la loi de De Morgan. On peut obtenir directement le résultat demandé en utilisant la première partie de la question, grâce à la loi de De Morgan. On note simplement $\bar{\cdot}$ le passage au complémentaire : pour une partie X de Ω, on note $\overline{X} = \Omega \setminus X$.
  Ainsi,

  $$\overline{\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B} = \overline{\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)} \cap \overline{B} \qquad \text{(De Morgan)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}\right) \cap \overline{B} && \text{(De Morgan)}\\
&= \bigcup_{i\in I} (\overline{A_i} \cap \overline{B}) && \text{(question précédente)}\\
&= \bigcup_{i\in I} (\overline{A_i \cup B}) && \text{(De Morgan)}\\
&= \overline{\bigcap_{i\in I} (A_i \cap B)} && \text{(De Morgan).}
\end{aligned}
$$

On obtient alors l'égalité de l'énoncé en passant au complémentaire de part et d'autre.