Applications

Exercice 1.

Soit Ω un ensemble et $A, B \subseteq \Omega$. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions indicatrices de parties de Ω que l'on précisera.

(i) $\min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$;
(ii) $\max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$;
(iii) $\mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$;
(iv) $1 - \mathbb{1}_A$;
(v) $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$;
(vi) $(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2$.

Injectivité, surjectivité, bijectivité

Exemples

Autocorrection A.

1. L'application $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \end{cases}$ est-elle injective ? surjective ?
2. Mêmes questions pour l'application $g : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{cases}$
3. Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$. Sont-elles injectives ? surjectives ?

Autocorrection B.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ x \mapsto x^2. \end{cases}$

1. L'application f est-elle injective ? surjective ?
2. Existe-t-il $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$? Existe-t-il $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $h \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$?

Exercice 2.

Déterminer si les applications suivantes sont injectives (resp. surjectives, bijectives).

(i) $\begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$;

(ii) $\begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$;

(iii) $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (y,x) \end{cases}$;

(iv) $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto 3y \end{cases}$;

(v) $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \mapsto (y, 0, y-x) \end{cases}$;

(vi) $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ z \mapsto z^2+z+1 \end{cases}$;

(vii) $\begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z^2+z+1 \end{cases}$;

(viii) $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, xy) \end{cases}$;

(ix) $\begin{cases} \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, xy) \end{cases}$;

(x) $\begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n+(-1)^n \end{cases}$;

(xi) $\begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(0) \end{cases}$;

(xii) $\begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}_+) \\ X \mapsto X \cap \mathbb{R}_+. \end{cases}$

Exercice 3.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to & \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{N} \to & \mathbb{N} \\ n \mapsto \max(0, n-1). \end{cases}$

1. Montrer que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
2. Peut-on en déduire que l'application g est la réciproque de f ?

Exercice 4.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to & \mathbb{Z} \\ n \mapsto & \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$

Montrer que f est bijective et donner la bijection réciproque.

Exercice 5.

On note $\pi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ la fonction qui associe à tout entier n le nombre de nombres premiers appartenant à l'intervalle entier $[\![1, n]\!]$.

La fonction π est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 6$^+$.

Déterminer si la fonction $\sin : \mathbb{Q} \to [-1, 1]$ est injective et/ou surjective.

Exercice 7$^+$.

Soit E et F deux ensembles non vides et G un ensemble ayant au moins deux éléments. Soit $f : E \to F$. On considère l'application

$$\varphi : \begin{cases} G^F \to & G^E \\ g \mapsto & g \circ f. \end{cases}$$

1. Montrer que φ est injective si et seulement si f est surjective.
2. Montrer que φ est surjective si et seulement si f est injective.

Exercice 8$^+$.

Soit Ω un ensemble et $X, Y \subseteq \Omega$. On considère l'application

$$\psi : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) \to & \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) \\ A \mapsto & (X \cap A, Y \cap A). \end{cases}$$

Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur X et Y pour que ψ soit injective (resp. surjective).

Quand ψ est bijective, exhiber sa réciproque.

Exercice 9^{++}.

1. Soit $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ deux bijections. Montrer que $\begin{cases} \mathbb{Z} \to & \mathbb{Z} \\ k \mapsto & f(k)\, g(k) \end{cases}$ n'est pas bijective.
2. Peut-elle être injective ?

Théorie

Exercice 10.

Soit E et F deux ensembles, et $A \subseteq E$. Soit $f : E \to F$. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses (on justifiera par une preuve ou un contre-exemple).

(i) Si f est injective, alors $f_{|A}$ est injective.

(ii) Si f est surjective, alors $f_{|A}$ est surjective.

(iii) Si $f_{|A}$ est injective, alors f est injective.

(iv) Si $f_{|A}$ est surjective, alors f est surjective.

Exercice 11.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que si f est strictement monotone, alors f est injective.

La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 12.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective.

1. Montrer que f est impaire si et seulement si f^{-1} l'est.
2. A-t-on le même résultat pour la parité ?

Exercice 13.

Soit E, F, G, H quatre ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications.

Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 14⁺.

Soit E un ensemble, $n > 1$ un entier et $f : E \to E$ telle que $f^{\circ n} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$ soit égale à f.

1. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.
2. On fixe $n = 2$. À quelle condition f est-elle injective ?

Exercice 15⁺.

Soit $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ deux applications telles que f soit injective, g soit surjective et $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \leqslant g(n)$.

Montrer que $f = g$.

Images directe et réciproque

Autocorrection C.

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$.

1. Soit A et B deux parties de F.
   - Montrer que $A \subseteq B \Rightarrow f^{-1}[A] \subseteq f^{-1}[B]$.
   - Montrer que $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$.
   - Montrer que $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$.
2. Soit C et D deux parties de E.
   - Montrer que $C \subseteq D \Rightarrow f[C] \subseteq f[D]$.
   - Montrer que $f[C \cup D] = f[C] \cup f[D]$.
   - Montrer que $f[C \cap D] \subseteq f[C] \cap f[D]$.
   - Donner un exemple prouvant que l'inclusion ci-dessus n'est pas toujours une égalité.

Exercice 16.

1. Déterminer $\sin[A]$, dans les cas $A = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $[0, 2\pi]$, $[-\pi, \pi]$, $[0, \pi/2]$, $[-\pi, \pi/2]$.
2. Déterminer $\sin^{-1}[B]$ dans les cas $B = [-1, 1]$, $[0, 1]$, $[3, 4]$, $\mathbb{R}$, $\{1\}$, $\{-1, 1\}$.

Exercice 17.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x^2 - 4x + 1. \end{cases}$

1. La fonction f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que f est injective sur $[1, +\infty[$. En déduire que f induit une bijection de $[1, +\infty[$ sur son image (que l'on précisera) et déterminer son application réciproque.
3. Déterminer $f\left[[0, 1]\right]$, $f[\mathbb{R}_-]$, $f[\mathbb{R}_+]$, $f\left[[-2, 2]\right]$, $f^{-1}[\{1\}]$, $f^{-1}[\{-1\}]$, $f^{-1}\left[[0, 1]\right]$, $f^{-1}\left[[-2, 1]\right]$.

Exercice 18.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z + \dfrac{1}{z}. \end{cases}$

1. L'application f est-elle injective ? surjective ?
2. Déterminer $f[\mathbb{R}^*]$ et $f[\mathbb{U}]$.

Exercice 19.

On considère

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z^2. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. On note $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Ré}\, z > 0\}$.
   Montrer que la restriction de f à Ω est injective.
3. Décrire l'image de $f_{|\Omega}$.

Exercice 20.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n + 1. \end{cases}$ Déterminer les parties $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ stables sous f.

Exercice 21.

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$.

1. Montrer que f est injective si et seulement si $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$.
2. Montrer que f est bijective si et seulement si $\forall A \in \mathcal{P}(E), f[E \setminus A] = F \setminus f[A]$.

Exercice 22$^+$.

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$.

1. Soit $A \subseteq E$. Montrer que $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ et donner un exemple prouvant qu'il n'y a pas toujours égalité.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}[f[A]] = A$.
3. Soit $B \subseteq F$. Montrer que $f\left[f^{-1}[B]\right] \subseteq B$ et donner un exemple prouvant qu'il n'y a pas toujours égalité.
4. Montrer que f est surjective si et seulement si $\forall B \in \mathcal{P}(F), f\left[f^{-1}[B]\right] = B$.

Exercice 23$^+$.

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$. On considère les applications

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F) \\ X \mapsto f[X] \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \psi : \begin{cases} \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E) \\ Y \mapsto f^{-1}[Y]. \end{cases}$$

1. Montrer les équivalences f injective $\Leftrightarrow$ φ injective $\Leftrightarrow$ ψ surjective.
2. Montrer les équivalences f surjective $\Leftrightarrow$ φ surjective $\Leftrightarrow$ ψ injective.

Familles d'ensembles

Autocorrection D.

1. Montrer $\displaystyle\bigcup_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[=]-1, 2[$.
2. Que vaut $\displaystyle\bigcap_{x\in[0,1]}]x-1, x+1[$?

Autocorrection E.

Soit Ω un ensemble, et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de Ω. Soit enfin $B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Montrer

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B) \qquad \text{et} \qquad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B).$$

Exercice 24 (Tout ensemble est une union de singletons).

Soit E un ensemble. Montrer que $E = \displaystyle\bigcup_{x\in E}\{x\}$.

Exercice 25.

Soit X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. Pour tout $y \in Y$, on définit $A_y = f^{-1}[\{y\}] \subseteq X$. Montrer que la famille $(A_y)_{y\in Y}$ est un recouvrement disjoint de X.

Expliciter (et dessiner) ce recouvrement dans les cas

$$m : \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{R} \\ z \mapsto |z|, \end{cases} \qquad \alpha : \begin{cases} \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \dfrac{z}{|z|} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \text{Ré} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}.$$

Exercice 26.

Soit X un ensemble et $f : X \to X$ une application. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X.

1. Montrer que si, pour tout $i \in I$, A_i est stable sous f, il en va de même de $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ et $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.
2. Est-il vrai en général que si $A \subseteq X$ est stable sous f, alors $X \setminus A$ l'est également ?

Exercice 27$^+$.

Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties de $\mathbb{R}$. On définit leurs *limites inférieure et supérieure*

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geqslant n} E_k \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geqslant n} E_k.$$

1. Montrer que $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \subseteq \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$.
2. Calculer $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $\limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ dans les cas suivants :
   - $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} = ([n,+\infty[)_{n\in\mathbb{N}}$;
   - $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left[(-1)^n n, +\infty\right[\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $\left(\mathbb{1}_{E_n}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ stationne (c'est-à-dire est constante à partir d'un certain rang).

Exercice 28^{++}.

Soit Ω un ensemble et $(A_i)_{i=1}^n$ et $(B_i)_{i=1}^n$ deux familles de parties de Ω. Montrer

$$\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap B_i) = \bigcap_{I\in\mathcal{P}([\![1,n]\!])} \left[\bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{j\notin I} B_j\right].$$