Sommes et produits

Exercice 7.
On pourra procéder par l'absurde et utiliser l'inégalité triangulaire.

Exercice 9.
On essayera, dans les trois cas, de reconnaître une somme télescopique.

Exercice 16.

1. L'une des deux façons est claire : on peut remarquer que les $n+1$ premiers termes de la somme S_{n+1} constituent la somme S_n, ce qui prouve $S_{n+1} = S_n + (n+1)q^{n+1}$.
   Par ailleurs, à l'aide d'un changement de variables, on obtiendra la relation
   $$S_{n+1} = \sum_{\ell=0}^{n} q^{\ell+1} + qS_n.$$

Exercice 17.
On pourra commencer par linéariser les expressions $\cos^2(k\theta)$ et $\sin^2(k\theta)$.

Exercice 18.
On pourra reconnaître une somme dans le quotient $\dfrac{1-z^n}{1-z}$.

Exercice 24.
La somme se réécrit $\displaystyle\sum_{k=0}^{4n} \varepsilon_k \binom{4n}{k}$, où $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite 4-périodique telle que $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$ et $\varepsilon_3 = -1$.

Voyez-vous un moyen pertinent d'écrire autrement cette suite ε à l'aide de nombres complexes ?

Exercice 33.

1. On pourra chercher à comprendre le résultat sur le triangle de Pascal.
2. Pour le deuxième calcul, on prendra son courage à deux mains et on exprimera k^3 en fonction (entre autres) de $\dbinom{k}{3}$.

Exercice 38.
Pour la première question, on fera un dessin d'une « grille » $(n+1) \times (n+1)$ pour comprendre ce qu'il se passe.

Exercice 39.
Pour la deuxième question, on pourra écrire $(2n)! = 2 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n)$ et rassembler les termes par symétrie : 2 avec $2n$, 3 avec $2n-1$, etc.

Exercice 40.
On peut procéder par récurrence.

Exercice 42.
On pourra montrer $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, t + \frac{1}{t} \geqslant 2$.

Exercice 43.
Pour la première question, on peut faire un calcul exact. Pour la seconde, penser à faire une transformation d'Abel, en utilisant la suite de la première question.

Exercice 45.

1. On pourra écrire $a_i - a_j$ comme une somme télescopique.
2. On pourra penser à écrire $a_k = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} a_k$, aussi bizarre que cela puisse paraître.
3. Inégalité triangulaire !

Exercice 47.
L'hypothèse de croissance entraîne que, pour tous i, j, les deux différences $a_i - a_j$ et $b_i - b_j$ ont le même signe. Que faire de cette information ?

Autocorrection

Autocorrection A.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1} \right) - \sum_{k=0}^{n} a_k && \text{(Chasles)} \\ &= a_{n+1}. \end{aligned}$$

   On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = S_n - S_{n-1}$. Par ailleurs, on a clairement $a_0 = S_0$.
2. On a
   (i) $\sum_{k=0}^{n+1} a_k = S_{n+1}$;
   (ii) $\sum_{k=n+1}^{2n} a_k = S_{2n} - S_n$;
   (iii) $\sum_{k=0}^{n} 2a_k = 2S_n$;
   (iv) $\sum_{k=0}^{n} (a_k - 1) = S_n - n - 1$;
   (v) $\sum_{k=0}^{n} (a_k - k) = S_n - \frac{n(n+1)}{2}$.

Autocorrection B.

Si $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, on a $\forall k \in \mathbb{N}, \cos(\varphi + k\theta) = \cos\varphi$ et $\sin(\varphi + k\theta) = \sin\varphi$, donc

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(\varphi + k\theta) = (n+1)\cos\varphi \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(\varphi + k\theta) = (n+1)\sin\varphi.$$

Supposons maintenant $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e^{i(\varphi+k\theta)} &= e^{i\varphi} \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} \\
&= e^{i\varphi} \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \\
&= e^{i\varphi} \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{-i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} \\
&= e^{i\varphi} e^{i\frac{n}{2}\theta} \frac{2i\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{2i\sin\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} e^{i\left(\varphi + \frac{n}{2}\theta\right)}
\end{aligned}$$

Donc, en prenant les parties réelle et imaginaire, il vient

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(\varphi + k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)\cos\left(\varphi + \frac{n}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(\varphi + k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)\sin\left(\varphi + \frac{n}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Autocorrection C.

(i) On a, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (1-1)^n = 0.$$

(ii) On a, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k 1^{n-k} = \left(-\frac{1}{2} + 1\right)^n = 2^{-n}.$$

(iii) On a, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{2k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k 1^{n-k} = (4+1)^n = 5^n.$$

Autocorrection D.

On écrit $n! = \prod_{k=2}^{n} k$. Le minimum des termes $2, 3, \dots, n$ est 2, alors que le maximum est n. Ainsi, l'encadrement brutal donne :

$$2^{n-1} = \prod_{k=2}^{n} 2 \leqslant \underbrace{\prod_{k=2}^{n} k}_{=n!} \leqslant \prod_{k=2}^{n} n = n^{n-1}.$$

Autocorrection E.

1. La formule n'a pas de sens pour $k = 1$. On va montrer que l'assertion est vraie pour $k_0 = 2$. Soit $k \geqslant 2$. On a
$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} \geqslant \frac{1}{k^2},$$
car $k(k-1) \leqslant k^2$ et que la fonction inverse décroît strictement sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} && \text{(Chasles)} \\
&\leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) && \text{(on somme les inégalités de la question 1)} \\
&\leqslant 1 + \left(1 - \frac{1}{n} \right) && \text{(télescopage)} \\
&\leqslant 2.
\end{aligned}$$