Sommes et produits

Généralités

Autocorrection A.

On considère deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(S_n)_{n\geqslant 0}$ reliées par la relation

$$\forall n \geqslant 0, S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer a_n en fonction des valeurs de la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer à l'aide des valeurs de la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ les sommes suivantes :

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} a_k$; (ii) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} a_k$; (iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2a_k$; (iv) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_k - 1)$; (v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_k - k)$.

Exercice 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes.

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k$; (iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2k$; (v) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$; (vii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$;

(ii) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} k$; (iv) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} 2k$; (vi) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} 2^k$; (viii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}$.

Exercice 2.

En fonction de $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme $1 + i + i^2 + \cdots + i^n$ et le produit $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdots i^n$.

Exercice 3.

Soit $n \geqslant 1$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^3$.

Exercice 4.

Montrer les identités suivantes.

(i) $\displaystyle\forall n \geqslant 1, \prod_{k=1}^{n} (4k-2) = \prod_{k=1}^{n} (n+k)$;

(ii) $\displaystyle\forall n \geqslant 1, \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

Exercice 5.

Soit $n \geqslant 1$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres réels. Pour quel $\xi \in \mathbb{R}$ a-t-on $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k - \xi) = 0$?

Exercice 6.

Soit $n > 1$ un entier. Évaluer sans calcul $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(2\pi \frac{k}{n}\right)$.

Exercice 7⁺.

Soit $n \geqslant 1$ et $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{i\theta_k}}{2^k} \neq 0$.

Exercice 8⁺.

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'entiers naturels (c'est-à-dire un élément de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$). On définit la fonction

$$S : \begin{cases} \mathbb{N} \to & \mathbb{N} \\ n \mapsto & \sum_{k=0}^{n} a_k. \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_n)_{n\geqslant 0}$ pour que la fonction f soit injective (resp. surjective, bijective).

Exercice 9.

Calculer $\sum_{p=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)$, $\sum_{k=0}^{n} k\,k!$ et $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$.

Exercice 10.

Utiliser la somme télescopique $(n+1)^4 = \sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^4 - k^4\right]$ pour obtenir une formule pour $\sum_{k=0}^{n} k^3$.

Exercice 11.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{2^n x}{\pi} \notin \mathbb{Z}$. Montrer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin(2^k x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{\cos(2^n x)}{\sin(2^n x)}$.

Exercice 12.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner des expressions simples pour les produits suivants.

(i) $\prod_{k=-1000}^{1000} (n^2 - n)$; (iv) $\prod_{k=n+1}^{2n} k^2$; (vii) $\prod_{k=0}^{n} 2^k$; (x) $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k}$;

(ii) $\prod_{k=1}^{n} (2k)$; (v) $\prod_{k=1}^{n} (2k+1)$; (viii) $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$; (xi) $\prod_{k=1}^{n} (4k^2 - 1)$;

(iii) $\prod_{k=1}^{n} k^2$; (vi) $\prod_{k=0}^{n} e^{-k}$; (ix) $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$; (xii) $\prod_{k=1}^{n} (k(n+1-k))$.

Exercice 13.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels strictement positifs. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![1, n]\!], \left(u_1 u_2 \cdots u_k\right)^n \leqslant \left(u_1 u_2 \cdots u_n\right)^k.$$

Somme géométrique

Autocorrection B.

Soit $\varphi, \theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\sum_{k=0}^{n} \cos(\varphi + k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(\varphi + k\theta)$.

Exercice 14.

Étant donné une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs strictement positives, on note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, construire une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\frac{S_n}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Exercice 15.

Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in]1, +\infty[, \frac{a^n - 1}{a - 1} \leqslant n a^{n-1}$.

Exercice 16$^+$.

Le but de cet exercice est de déterminer, de trois façons différentes, la valeur de la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k\, q^k,$$

pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1. Exprimer de deux façons différentes S_{n+1} en fonction de S_n, et en déduire la valeur de S_n.
2. Calculer $(q-1)S_n$ et en déduire la valeur de S_n.
3. On considère la fonction
$$\sigma : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} x^k. \end{array}$$
   Donner une formule pour la dérivée σ', et en déduire la valeur de S_n.

Exercice 17.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin^2(k\theta)$.

Exercice 18.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Montrer que $\left|\frac{1 - z^n}{1 - z}\right| \leqslant \frac{1 - |z|^n}{1 - |z|}$.

Exercice 19.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2kx)$ et $\sum_{k=0}^{n-1} \cos((2k+1)x)$.
2. En déduire $\cos^2 \frac{\pi}{14} + \cos^2 \frac{3\pi}{14} + \cos^2 \frac{5\pi}{14}$.

Coefficients binomiaux, binôme de Newton

Autocorrection C.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \binom{n}{k}}{2^k}, \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} 2^{2k} \binom{n}{k}.$$

Exercice 20.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^4}{2} + \dfrac{n^3}{3} - \dfrac{n}{30}$ est un entier.

Exercice 21.

Soit $n \geqslant 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$. Combien vaut cette somme ?

Exercice 22.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos k\theta$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin k\theta$.

Exercice 23⁺.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$S_0 = \sum_{p=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3p}, \qquad S_1 = \sum_{p=0}^{\lfloor (n-1)/3 \rfloor} \binom{n}{3p+1}, \qquad \text{et} \qquad S_2 = \sum_{p=0}^{\lfloor (n-2)/3 \rfloor} \binom{n}{3p+2}.$$

À l'aide des développpements de $(1+1)^n$, $(1+j)^n$ et $(1+\bar{j})^n$, déterminer S_0, S_1 et S_2.

Exercice 24⁺.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\displaystyle\sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^p \binom{4n}{2p+1}$.

Exercice 25.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer

$$\forall p \in [\![0,n]\!], \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p} \qquad \text{et} \qquad \forall p \in [\![1,n]\!], \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = 0.$$

Exercice 26.

On rappelle que les nombres de Fibonacci $(F_n)_{n \geqslant 1}$ sont définis par

$$F_1 = F_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}.$$

Exercice 27$^+$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}(-1)^k$.

Exercice 28$^+$.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $2\binom{2p+1}{p+1} = \binom{2p+2}{p+1}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^k}$.

   Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1} = 2S_n$, et en déduire l'expression de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 29 (Unimodalité des coefficients binomiaux).

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le sens de variation de la famille $\left(\binom{n}{k}\right)_{k=0}^{n}$.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{2n}{n} \geqslant \frac{2^{2n}}{2n+1}$.

Exercice 30.

Soit $k \geqslant 1$ un entier. Montrer que le produit de k entiers consécutifs est toujours divisible par $k!$.

Exercice 31 (Formule d'absorption et conséquences).

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. **Formule d'absorption.** Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$, de $\sum_{k=0}^{n} k\,2^k\binom{n}{k}$ et de $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice 32.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. En dérivant de deux façons différentes la fonction $x \mapsto (x+1)^n$, trouver la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
2. Par une méthode analogue, calculer $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

Exercice 33$^+$ (Sommation de l'indice du haut, et conséquences).

1. Soit n et p des entiers tels que $n \geqslant p \geqslant 0$. Montrer la *formule de sommation de l'indice du haut* :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

2. Soit $n \geqslant 1$. Déduire de ce qui précède $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$ et $\sum_{k=0}^{n} k^3$.

Sommes doubles, produits doubles

Calcul

Exercice 34. ☑

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

(i) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 1\,;$

(ii) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i\,;$

(iii) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i\,;$

(iv) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (i+j)\,;$

(v) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)^2\,;$

(vi) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij\,;$

(vii) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (j-i)\,;$

(viii) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (j-i)\,;$

(ix) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |j-i|\,;$

(x) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i}\,;$

(xi) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}\,;$

(xii) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i^2}{j}\,;$

(xiii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \max(i,j)\,;$

(xiv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \min(i,j)\,;$

(xv) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 3^{i+j}.$

Exercice 35.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression simple pour les produits suivants.

(i) $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x^{i+j}\,;$

(ii) $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i^j\,;$

(iii) $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij.$

Exercice 36$^+$.

Soit $n \geqslant 1$. Calculer $\displaystyle\sum_{(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3} \min(i, \max(j,k)).$

Applications à des sommes simples

Exercice 37.

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, on note $S_n^{(p)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^p.$

1. Soit $n, p \in \mathbb{N}$.
   En simplifiant de deux façons la somme $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i < j \leqslant n} i^p$, montrer la *formule d'al-Haytham* (965-1039) :

$$n\, S_n^{(p)} - S_n^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} S_k^{(p)}.$$

2. En déduire une formule pour la suite $(S_n^{(4)})_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 38.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2}$ une famille de nombres. Montrer que

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n+1} a_{i,j} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} a_{i,n+1} + \sum_{j=1}^{n} a_{n+1,j} + a_{n+1,n+1}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$. (On a donc $S_0 = 0$).
   En calculant de deux façons (dont l'une utilise la question précédente) la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$.

Quelques inégalités

Autocorrection D.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par un encadrement grossier, montrer $2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^{n-1}$.

Autocorrection E.

1. Trouver un entier k_0 (pas trop grand) tel que $\forall k \geqslant k_0, \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
2. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2$.

Exercice 39.

1. Montrer $\forall a, b \in \mathbb{R}, 4ab \leqslant (a+b)^2$.
2. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*, (2n)! \leqslant (n+1)^{2n-1}$.

Exercice 40 (Minoration d'Oresme).
On rappelle que l'on note $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des nombres harmoniques.

Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, H_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$.

Exercice 41.

1. Montrer $\forall k \geqslant 2, 1 + \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$.
2. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \leqslant 4$.

Exercice 42$^+$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}$.

Exercice 43^{++}.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 1 \pmod{2\pi}$.

1. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, c'est-à-dire $\exists M \in \mathbb{R}_+ : \forall n \in \mathbb{N}, \left|\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right| \leqslant M$.
2. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Exercice 44^{++}.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - u_n| \leqslant 1$.

On définit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |v_{n+1} - v_n| \leqslant \frac{1}{2}$.

Exercice 45^{+} (Inégalité discrète de Sobolev-Gallagher).

Soit $n \geqslant 1$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. On note $V = \sum_{\ell=1}^{n-1} |a_{\ell+1} - a_\ell|$.

Le but de l'exercice est de montrer l'inégalité $\forall k \in [\![1, n]\!], |a_k| \leqslant V + \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} |a_\ell|$.

1. Montrer $\forall i, j \in [\![1, n]\!], |a_i - a_j| \leqslant V$.
2. En déduire $\forall k \in [\![1, n]\!], \left|a_k - \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell\right| \leqslant V$.
3. Conclure.

Exercice 46^{+}.

Soit $n \geqslant 1$ et $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geqslant n^2.$$

Exercice 47^{++} (Inégalité monotone de Čebyšëv).

Soit n un entier et $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ deux familles croissantes indexées par $[\![1, n]\!]$. Montrer

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} b_j\right).$$