Calculus

Exercice 1.
On pourra procéder par l'absurde.

Exercice 3.
Pour la deuxième question, on pourra utiliser la notion de dérivation pour montrer que si $x \mapsto \sin(x) + \sin(\alpha x)$ est T-périodique, alors il en va de même de $x \mapsto \sin(x) + \alpha^2 \sin(\alpha x)$.

Il est alors souvent possible de montrer que $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \sin(\alpha x)$ sont individuellement T-périodiques.

Exercice 9.
On pourra calculer les premières puissances de 2. Combien ont un chiffre ? deux ? trois ? etc.

À partir de là, vous pourrez chercher à énoncer une conjecture précise sur le nombre d'entiers n tels que 2^n ait k chiffres, et chercher à la démontrer à l'aide du logarithme décimal.

Exercice 10.
On pourra utiliser la propriété fondamentale de l'exponentielle pour montrer que si exp est la somme de $N + 1$ fonctions périodiques, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\lambda \exp$ soit la somme de N fonctions périodiques.

Exercice 12.
Dans les deux cas, on pourra rédiger par analyse et synthèse, pour plus de souplesse.

(i) Remarquer que $8^x = (2^x)^3$.

(ii) Si (x, y) est solution du système, on obtient facilement un système somme produit liant x et $y' = 2y$.
On ne s'alarmera pas si les solutions sont un peu pénibles.

Exercice 18.
Essayer de faire intervenir la fonction tangente hyperbolique (cela mène à des disjonctions de cas).

Exercice 19.
Comment ferait-on s'il s'agissait de (co)sinus « usuels » et pas hyperboliques ?

Exercice 26.
On pourra essayer de traduire l'énoncé en termes de la fonction

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto xe^x. \end{cases}$$

Exercice 27.

Dans les deux cas, on peut avoir envie « d'identifier » et de conclure que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est la seule solution.

Cependant, rien ne justifie *a priori* cette identification. Il faut essayer d'obtenir des renseignements indirects sur a, b et c, par exemple en considérant certaines valeurs particulières de x, voire en introduisant une fonction $f_{a,b,c} : x \mapsto ae^{2x} + be^x + c$ et en étudiant ses limites, sa dérivée, ou d'autres caractéristiques.

Une fois le raisonnement fait, on verra si notre envie d'identification était justifiée.

Exercice 28.

Pour la première question, étudier la fonction.

Exercice 37.

Parmi les nombreuses fonctions dont la positivité conclurait, on pourra en choisir une dont la dérivée ne fait plus intervenir que des fonctions trigonométriques.

Exercice 42.

D'une manière ou d'une autre, il faut se ramener au cas d'égalité des (co)sinus.

Exercice 46.

Remarquer qu'on ne demande que la dérivée n-ième (et pas toutes les dérivées). Essayer d'exprimer f_{n+1} en fonction de f_n.

Exercice 47.

On pourra procéder par récurrence, en remarquant que l'expression $\cos^2(f(x)) = \cos^2(\arctan(x))$ se simplifie.

Autocorrection

Autocorrection A.

1. On montre facilement que la somme de deux fonctions paires (resp. impaires) est paire (resp. impaire).
   Traitons par exemple le cas impair.
   Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions impaires. Montrons que $f + g$ est impaire.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
   $$\begin{aligned} (f+g)(-x) &= f(-x) + g(-x) \\ &= -f(x) - g(x) && \text{par imparité de } f \text{ et de } g \\ &= -(f+g)(x), \end{aligned}$$
   ce qui démontre que $f + g$ est impaire.
   En revanche, on ne peut pas déterminer le sens de variation de la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Donnons deux arguments en ce sens.

- Considérons la fonction
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & 1 + x. \end{cases}$$
Cette fonction est la somme de $x \mapsto 1$ (paire) et $x \mapsto x$ (impaire). Pourtant, on vérifie aisément qu'elle n'est ni paire, ni impaire, car $f(-1) = 0$ et $f(1) = 2$, qui ne sont ni égaux ni opposés.
- On a vue que toute fonction se décomposait (en fait, d'une unique manière, même si cela n'importe guère ici) en une somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Le fait d'être somme de deux telles fonctions n'apporte donc aucune information sur la fonction somme. En particulier, il n'y a rien à dire sur son sens de variation.

En résumé, on a la « table d'addition » suivante.

$+$	paire	impaire
paire	paire	?
impaire	?	impaire

2. La parité de deux fonctions détermine la parité de leur produit, selon la « table de multiplication » suivante.

$\times$	paire	impaire
paire	paire	impaire
impaire	impaire	paire

Montrons par exemple que le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire.
Soit donc $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions, paire et impaire, respectivement. Montrons que le produit pi est impair.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{aligned}(pi)(-x) &= p(-x)\,i(-x) \\ &= p(x) \times (-i(x)) \\ &= -p(x)\,i(x) \\ &= -(pi)(x),\end{aligned}$$
ce qui conclut la preuve.

3. La parité de deux fonctions détermine la parité de leur composition, selon la « table de composition » suivante.

$\circ$	paire	impaire
paire	paire	paire
impaire	paire	impaire

Montrons par exemple que la composée (dans l'un ou l'autre sens) d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction paire.
Soit donc $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions, paire et impaire, respectivement.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{aligned}(p \circ i)(-x) &= p\,(i(-x)) \\ &= p\,(-i(x)) \\ &= p\,(i(x)) \\ &= (p \circ i)(x),\end{aligned}$$
ce qui montre que $p \circ i$ est paire.
De même, on a
$$\begin{aligned}(i \circ p)(-x) &= i\,(p(-x)) \\ &= i\,(p(x)) \\ &= (i \circ p)(x),\end{aligned}$$
ce qui montre que $p \circ i$ est paire.

4. La composée $h \circ f$ est paire, si f est paire. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(h \circ f)(-x) &= h(f(-x)) \\ &= h(f(x)) \\ &= (h \circ f)(x).\end{aligned}$$

En revanche, il n'y a rien à dire sur une composée $h \circ f$, si f est impaire. Par exemple, si h n'est ni paire, ni impaire et que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ (qui est impaire), on a $h \circ f = h$.

5. Que f soit paire ou impaire, il n'y a rien à dire sur la composée $f \circ h$. Par exemple, si $h : x \mapsto 1 + x$, les fonctions $x \mapsto (1+x)^2$ (correspondant à la fonction paire $f : x \mapsto x^2$) et $x \mapsto 1 + x$ (correspondant à la fonction impaire $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$) ne sont ni paires ni impaires.

Autocorrection B.

L'expression a un sens pour $x > 1$ et on a

$$x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}} = \exp\left(\frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \ln x\right) = \exp(\ln(\ln x)) = \ln x.$$

Autocorrection C.

(a) $D = D' = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{2a}{x^3} \exp(-a/x^2)$;

(b) $D = D' = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \not\equiv 0 \pmod{\pi}\}$,

$$f'(x) = -\frac{(2ax+b)\sin(ax^2+bx+1)\sin x + \cos(ax^2+bx+1)\cos x}{\sin^2 x} ;$$

(c) $D = D' =]-\infty, -a[\cup]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \left(\ln\left(1 + \frac{a}{x}\right) - \frac{a}{a+x}\right)\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$$

(d) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = -\dfrac{\cos x \, \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$;

(e) $D = D' = \left]-\dfrac{b}{a}, +\infty\right[$, $f'(x) = \left(\ln(ax+b) + \dfrac{ax}{ax+b}\right)(ax+b)^x$;

(f) $D = \mathbb{R}_+$, $D' = \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 1 - \dfrac{a}{2\sqrt{x}}$;

(g) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2 \operatorname{ch} x}$;

(h) $D = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$, $D' = \left]-\sqrt{2}, 0\right[\cup \left]0, \sqrt{2}\right[$, $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}} & \text{si } x < 0 ; \end{cases}$

(i) $D =]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$, $D' =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$, $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+2x}} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x^2+2x}} & \text{si } x < -2 ; \end{cases}$

(j) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \not\equiv -\dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}\right\}$, $D' = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \not\equiv \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi}\right\}$,

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{signe}(\cos x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & \text{si } \cos x > 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } \cos x < 0 ; \end{cases}$$

(k) $D = D' = \{x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}\}$, $f'(x) = \dfrac{\sin x \, \cos^2 x \,(\cos x - 3)}{(1-\cos x)^3}$;

(l) $D = D' = \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right) \cos\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$;

(m) $D = D' = \{x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv 0 \pmod{\pi/2}\}$, $f'(x) = \dfrac{\sin(2x) - 2(x+1)\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$;

(n) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = (8x+20)\cos\left((2x+5)^2\right)$;

(o) $D = \mathbb{R}_-$, $D = \mathbb{R}_-^*$, $f'(x) = \dfrac{-1}{(1-x)\sqrt{-x}}$;

(p) $D = \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, $D' = \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{\arcsin x - \dfrac{\pi}{6}}}$;

(q) $D = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k\right]$, $D' = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{4} + \pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k\right[$, $f'(x) = \dfrac{1+\tan^2 x}{\sqrt{1-\tan^2 x}}$;

(r) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{ch}(x)\sin(x) + \mathrm{sh}(x)\cos(x)$;

(s) $D = \mathbb{R}_+$, $D' = \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{1+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

(t) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{1+\mathrm{ch}\, x}$;

(u) $D = D' = \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = (\ln x + 1)x^x$;

(v) $D = D' =]-1, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{\cos x}{1+x} - \sin x \, \ln(1+x)$;

(w) $D = D' = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2\pi k, \pi + 2\pi k[$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sin x}$;

(x) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{1+\mathrm{ch}(x)^2}$;

(y) $D = [-1, 0[\cup]0, 1]$, $D' =]-1, 0[\cup]0, 1[$, $f'(x) = -\dfrac{\mathrm{ch}(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}\ \mathrm{sh}(\arcsin x)^2}$;

(z) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\cos x}{(\cos x + 2)^4} + \dfrac{4\sin^2 x}{(\cos x+2)^5}$.

(α) $D = D' = \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\arctan x}$;

(β) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = (\ln \mathrm{ch}\, x + x \ \mathrm{th}\, x)\ (\mathrm{ch}\, x)^x$;

(γ) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 \ \cos(5x+1) - 5x^3 \sin(5x+1)$;

(δ) $D = D' = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\sqrt{\pi n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$, $f'(x) = -2x\dfrac{\cos(x^2)}{\sin^2(x^2)}$;

(ε) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$;

(ζ) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = (3x^2+4x+3)e^{x^3+2x^2+3x+4}$;

(η) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} \exp\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)$;

(θ) $D = D' = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{1}{2x^2 \, \mathrm{sh}^2\left(\frac{1}{2x}\right)} = \dfrac{2e^{1/x}}{x^2\left(e^{1/x}-1\right)^2}$;

(ι) $D = D' = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$, $f'(x) = -2\dfrac{x\ \cos(2x) + (x^2-2)\sin(2x)}{(x^2-2)^2}$;

(κ) $D = D' = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\pi k - \frac{\pi}{4}, \pi k + \frac{\pi}{4}\right[$, $f'(x) = -2\tan(2x)$;

(λ) $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $D' = \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, $f'(x) = \text{signe}(x(x-1)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 1 \\ -1 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$;

(μ) $D = [1, +\infty[$, $D' =]1, +\infty[$, $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

(ν) $D =]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$, $D' =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$;

(ξ) $D = D' =]1, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x \ln x}$;

(o) $D = D' =]e, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x \ln x \ln\ln x}$;

(π) $D = D' = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \cos x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\sin x$;

(ρ) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{x\sin^2 x + x^2 \sin x \cos x}{\sqrt{1 + x^2\sin^2 x}}$;

(σ) $D = D' = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $f'(x) = \frac{2}{\cos x}$;

(τ) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin x\, e^{\cos x}$;

(υ) $D = D' = \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$;

(φ) $D = \mathbb{R}$, $D' = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\operatorname{ch} x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{\operatorname{ch} x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$;

(χ) $D = D' = \mathbb{R}\setminus\{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $f'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$;

(ψ) $D = [-1, 0[\cup]0, 1]$, $D' =]-1, 0[\cup]0, 1[$, $f'(x) = \frac{2x}{\arcsin(x^2)\sqrt{1-x^4}}$;

(ω) $D = D' = \{x \in \mathbb{R} \mid e^x + \sin x > 0\}$, $f'(x) = \frac{e^x + \cos x}{e^x + \sin x}$.