Introduction aux développements limités

Exercice 6.
On pourra commencer par constater que le cours affirme que la réponse est oui **si l'on fait une hypothèse supplémentaire de régularité sur la fonction**.

Autocorrection

Autocorrection A.

(i) $e^x \sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{4}{3}x + \frac{13}{18}x^2 + \frac{23}{81}x^3 + o(x^3)$;

(ii) $\sin(x)\ln(1+x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$;

(iii) $\sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)$;

(iv) $(e^x - 1)\sin x = x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$;

(v) $\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$;

(vi) $e^{\cos x} - (1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{e}{2}x - \frac{23}{24}ex^2 + o(x^2)$;

(vii) $(\sin x)^4 = x^4 - \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{5}x^8 + o(x^8)$;

(viii) $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$;

(ix) $\frac{xe^{-x}}{2x+1} = x - 3x^2 + \frac{13}{2}x^3 - \frac{79}{6}x^4 + o(x^4)$;

(x) $(\cos x)^{1/x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{5}{48}x^3 + o(x^3)$;

(xi) $(2+h)^4 = 16 + 32h + 24h^2 + 8h^3 + h^4 + o(h^{100})$;

(xii) $\sqrt{1+h} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + o(h^2)$;

(xiii) $\frac{1}{1+(1+h)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}h + \frac{1}{8}h^2 + o(h^2)$;

(xiv) $\exp(1+h) = e + eh + \frac{e}{2}h^2 + \frac{e}{6}h^3 + o(h^3)$;

(xv) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+h\right)\cos\left(3\left(\frac{\pi}{3}+h\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}h + \frac{5\sqrt{3}}{2}h^2 + o(h^2)$;

(xvi) $\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right)} = 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{5}{6}h^3 + o(h^3)$;

(xvii) $\frac{(1+h)\ln(1+h)}{(1+h)^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12}h^2 + \frac{1}{12}h^3 + o(h^3)$.

Autocorrection B.

Dans la plupart des questions, on aura une fraction $x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$, et on pourra calculer des équivalents $u(x) \underset{x\to0}{\sim} \lambda\, x^n$ et $v(x) \underset{x\to0}{\sim} \mu\, x^m$.

- Si $n \geqslant m$, le cours garantit que $\dfrac{u(x)}{v(x)} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{\lambda}{\mu} x^{n-m}$, ce qui donne immédiatement la limite, à savoir : 0 si $n > m$; λ/μ si $n = m$.
- Si $n < m$, le même raisonnement montre que l'inverse $\dfrac{v}{u}$ vérifie $\dfrac{v(x)}{u(x)} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{\mu}{\lambda} x^{m-n} \xrightarrow[x\to0]{} 0$, ce qui montre que la fraction de départ diverge, parce que $\left|\dfrac{u(x)}{v(x)}\right| \xrightarrow[x\to0]{} +\infty$.

  On dira plus tard que l'on a un équivalent $\dfrac{u(x)}{v(x)} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{\lambda}{\mu} x^{n-m}$, ce qui donnera bien $\left|\dfrac{u(x)}{v(x)}\right| \xrightarrow[x\to0]{} +\infty$.

(i) Le dénominateur est $\dfrac{1}{3}x^3 + \underset{x\to0}{o}(x^3)$, donc $\underset{x\to0}{\sim} \dfrac{1}{3}x^3$.
Le numérateur est $-\dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{o}(x^2)$, donc $\underset{x\to0}{\sim} -\dfrac{1}{2}x^2$.
La fonction diverge donc en 0.

(ii) On a $\tan h \underset{h\to0}{\sim} h$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\ln\left(2(1+h)^2-1\right) &= \ln(1+4h+2h^2)\\
&= (4h+2h^2) + \underset{h\to0}{o}(h) \qquad \text{car } \begin{cases} \ln(1+u) = u + \underset{u\to0}{o}(u)\\ 4h+2h^2 \underset{h\to0}{\sim} 4h \end{cases}\\
&= 4h + \underset{h\to0}{o}(h)\\
&\underset{h\to0}{\sim} 4h,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{donc} \quad & \frac{\ln(2(1+h)^2-1)}{\tan((1+h)-1)} \underset{h\to0}{\sim} 4\\
\text{donc} \quad & \frac{\ln(2(1+h)^2-1)}{\tan((1+h)-1)} \xrightarrow[h\to0]{} 4\\
\text{donc} \quad & \frac{\ln(2x^2-1)}{\tan(x-1)} \xrightarrow[x\to1]{} 4.
\end{aligned}$$

(iii) On a $\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{\sin^3 x} = \dfrac{\sin^3 x - x^3}{x^3 \sin^3 x}$.
On a déjà $x^3 \sin^3 x \underset{x\to0}{\sim} x^6$.
Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\sin^3 x - x^3 &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to0}{o}(x^3)\right)^3 - x^3\\
&= x^3\left(1 - \frac{x^2}{6} + \underset{x\to0}{o}(x^2)\right)^3 - x^3\\
&= x^3\left(1 - 3\frac{x^2}{6} + \underset{x\to0}{o}(x^2)\right) - x^3 \qquad \text{car } \begin{cases} (1+u)^3 = 1 + 3u + \underset{u\to0}{o}(u)\\ -\dfrac{x^2}{6} + \underset{x\to0}{o}(x^2) \underset{x\to0}{\sim} -\dfrac{x^2}{6} \end{cases}\\
&= -\frac{1}{2}x^5 + \underset{x\to0}{o}(x^5)
\end{aligned}$$

$$\underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}x^5.$$

Ainsi, cette fonction diverge en 0.

(iv) On a

$$\begin{aligned}
x - \arctan x &= x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) \\
&= \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) \\
&\underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3}{3} \\
\text{et} \qquad \sin^3 x &\underset{x\to 0}{\sim} x^3 \\
\text{donc} \qquad \frac{x - \arctan x}{\sin^3 x} &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{3} \\
\text{donc} \qquad \frac{x - \arctan x}{\sin^3 x} &\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(v) On a

$$\begin{aligned}
(1+h)^3 + 7(1+h)^2 - 8 &= \left(1 + 3h + \underset{h\to 0}{o}(h)\right) + 7\left(1 + 2h + \underset{h\to 0}{o}(h)\right) - 8 \\
&= 17h + \underset{h\to 0}{o}(h) \\
&\underset{h\to 0}{\sim} 17h \\
\text{et} \quad (1+h)^4 + (1+h)^3 - 2 &= \left(1 + 4h + \underset{h\to 0}{o}(h)\right) + \left(1 + 3h + \underset{h\to 0}{o}(h)\right) - 2 \\
&= 7h + \underset{h\to 0}{o}(h) \\
&\underset{h\to 0}{\sim} 7h.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi,} \quad \frac{(1+h)^3 + 7(1+h)^2 - 8}{(1+h)^4 + (1+h)^3 - 2} &\underset{h\to 0}{\sim} \frac{7}{17} \\
\text{donc} \quad \frac{(1+h)^3 + 7(1+h)^2 - 8}{(1+h)^4 + (1+h)^3 - 2} &\xrightarrow[h\to 0]{} \frac{7}{17}.
\end{aligned}$$

In fine,

$$\frac{x^3 + 7x^2 - 8}{x^4 + x^3 - 2} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{7}{17}.$$

(vi) On a $(\cos x)^{\ln|x|} = \exp\left(\ln|x| \ln \cos x\right)$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\ln \cos x &= \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\
&= \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \qquad \text{car} \quad \begin{cases} \ln(1+u) = u + \underset{u\to 0}{o}(u) \\ -\dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2} \end{cases} \\
&= -\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).
\end{aligned}$$

Cela entraîne que $\ln \cos x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, et même que $\dfrac{\ln \cos x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Par ailleurs, par croissances comparées, on a

$$x \ln|x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Ainsi,

$$\ln|x| \ln\cos x = \big(x \ln|x|\big)\,\frac{\ln\cos x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Par continuité de l'exponentielle, on en déduit :

$$(\cos x)^{\ln|x|} = \exp\left(\ln|x| \ln\cos x\right) \xrightarrow[x\to 0]{} \exp(0) = 1.$$