

---

## Introduction aux développements limités

---

### Calcul

#### Autocorrection A.



Déterminer les développements limités suivants.

- |  |   |
|--|---|
| (i) $DL_3(0)$ de $x \mapsto e^x \sqrt[3]{1+x}$ ;                 | (x) $DL_3(0)$ de $x \mapsto (\cos x)^{1/x}$ ;                           |
| (ii) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sin(x) \ln(1+x)$ ;                 | (xi) $DL_{100}(2)$ de $x \mapsto x^4$ ;                                 |
| (iii) $DL_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+\sin x}$ ;                 | (xii) $DL_2(1)$ de $x \mapsto \sqrt{x}$ ;                               |
| (iv) $DL_3(0)$ de $x \mapsto (e^x - 1) \sin x$ ;                 | (xiii) $DL_2(1)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ ;                         |
| (v) $DL_2(0)$ de $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ ;                 | (xiv) $DL_3(1)$ de $\exp$ ;   |
| (vi) $DL_2(0)$ de $x \mapsto e^{\cos x} - (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ; | (xv) $DL_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ de $x \mapsto \sin(x) \cos(3x)$ ; |
| (vii) $DL_8(0)$ de $x \mapsto (\sin x)^4$ ;                      | (xvi) $DL_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $x \mapsto \sqrt{\tan x}$ ;   |
| (viii) $DL_6(0)$ de $x \mapsto \tan x$ ;                         | (xvii) $DL_3(1)$ de $x \mapsto \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$ .               |
| (ix) $DL_4(0)$ de $x \mapsto \frac{xe^{-x}}{2x+1}$ ;             |   |

#### Exercice 1.

1. À l'aide de la méthode générale de calcul des DL, déterminer un  $DL_8(0)$  de  $\tan$ .
2. Retrouver ce  $DL_8(0)$  à l'aide du théorème de Taylor-Young.  
Pourquoi est-ce ici une idée raisonnable ?

#### Exercice 2.



1. Donner le  $DL_3(0)$  de  $x \mapsto (1+x)^{1/x}$ .
2. Donner les  $DL_3(0)$  de  $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ .

#### Exercice 3.



1. Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto xe^{x^2} \end{cases}$ .

- (a) Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans lui-même.
- (b) Montrer que sa réciproque  $f^{-1}$  admet un développement limité à l'ordre 5 de la forme

$$f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o_{x \rightarrow 0}(x^5).$$

- (c) En utilisant l'égalité  $f^{-1} \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$ , déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

2. Suivre le même schéma pour obtenir un  $DL_3(0)$  de la réciproque de  $x \mapsto 2x + \sin x$ .

**Exercice 4.**

Soit  $f : x \mapsto \arctan \frac{\sqrt{3} + x}{1 + x\sqrt{3}}$ . En commençant par calculer  $f'$ , déterminer le  $DL_4(0)$  de  $f$ .

**Exercice 5.**

Donner le  $DL_{12}(0)$  de  $x \mapsto \ln \left( \sum_{k=0}^{11} \frac{x^k}{k!} \right)$ .

**Exercice 6.** 

Une fonction paire telle que  $f(x) = 1 + x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$  vérifie-t-elle  $f(x) = 1 + x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$  ?

## Applications

**Autocorrection B.**

Déterminer la nature (convergente ou divergente) des fonctions suivantes, au voisinage du point donné. On précisera la limite dans le cas convergent.

(i)  $x \mapsto \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{\tan x - x}$  (en 0);

(iv)  $x \mapsto \frac{x - \arctan x}{\sin^3 x}$  (en 0);

(ii)  $x \mapsto \frac{\ln(2x^2 - 1)}{\tan(x - 1)}$  (en 1);

(v)  $x \mapsto \frac{x^3 + 7x^2 - 8}{x^4 + x^3 - 2}$  (en 1);

(iii)  $x \mapsto \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin^3 x}$  (en 0);

(vi)  $x \mapsto (\cos x)^{\ln|x|}$  (en 0).

**Exercice 7.**

Soit  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$  impaires telles que  $f'(0) = g'(0) = 1$ . Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(g(x)) - g(f(x))}{x^6}$ .

**Exercice 8.**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $f = \sin^n$ . Calculer, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $f^{(k)}(0)$ .

**Exercice 9<sup>+</sup>.**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . En calculant de deux façons différentes le  $DL_n(0)$  de  $x \mapsto (e^x - 1)^n$ , calculer, pour tout  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , la somme

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p.$$

**Exercice 10<sup>+</sup>.**

Soit  $f : x \mapsto \ln \left( \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} \right)$ . Montrer que  $f^{(1789)}(0) = 0$ .