Inégalités

Exercice 1.
On a déjà fait cette démonstration, dans un autre contexte...

Exercice 2.
Appliquer habilement l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 3.
Pour la deuxième question, on pourra utiliser l'inégalité $\forall k \geqslant 2, \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$ pour majorer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 6.
On pourra chercher à diviser de part et d'autre par le membre de droite de l'inégalité, pour montrer une majoration par 1.

Exercice 7.
Pour la deuxième question, on pourra commencer par démontrer $\forall m \in \mathbb{N}, P(2^m)$.

Exercice 8.
On pourra développer le membre de droite et le réécrire sous la forme $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{i+k}$, où, dans l'expression b_{i+k}, les indices sont à comprendre *modulo* n, c'est-à-dire que par exemple $b_{n+1} = b_1$.

Exercice 10.
Étant donné une fonction f convexe générale, que peut-on dire de la fonction $x \mapsto f(-x)$?

Exercice 12.
On pourra se rappeler (voire redémontrer) qu'une fonction $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si

$$\forall a < b < c \in \mathbb{R}_+^*, (c-a)g(b) \leqslant (c-b)g(a) + (b-a)g(c).$$

Exercice 16.
On pourra commencer par remarquer que le résultat est facile sur $[0, 1[$.

Exercice 29.
Pour mettre le problème en équations, on pourra calculer l'aire du n-gone en le découpant en triangles dont un sommet est au centre du cercle.

Exercice 31.
On pourra, après justification se ramener au cas où $x \leqslant y \leqslant \frac{x+z}{2} \leqslant z$.

Exercice 33.

2. Dans le sens difficile, remarquer que la fonction $\dfrac{f^\alpha - 1}{\alpha}$ est convexe.
3. Dans le sens difficile, obtenir une inégalité de la forme $f\big((1-\lambda)a + \lambda b\big) \leqslant (1-\lambda)u_\beta + \lambda v_\beta$, puis régler β de telle sorte que $u_\beta = v_\beta$ (c'est une manière usuelle, dans ce genre de cas, de transformer une expression additive en une expression multiplicative).

Exercice 34.

Procéder par l'absurde. Voyez-vous pourquoi on peut se ramener au cas d'une fonction strictement positive, strictement croissante, et strictement convexe ou strictement concave ?

Autocorrection

Autocorrection A.

(i) On a $1 = \sum_{k=1}^n p_k \times 1 \overset{CS}{\leqslant} \sqrt{\sum_{k=1}^n p_k^2}\underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^n 1^2}}_{=\sqrt{n}}$, donc $\sum_{k=1}^n p_k^2 \geqslant \dfrac{1}{n}$.

(ii) On a $n = \sum_{k=1}^n \sqrt{p_k} \times \dfrac{1}{\sqrt{p_k}} \overset{CS}{\leqslant} \underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^n p_k}}_{=1}\sqrt{\sum_{k=1}^n \dfrac{1}{p_k}}$, donc $\sum_{k=1}^n \dfrac{1}{p_k} \geqslant n^2$.

(iii) On a $n^2 \leqslant \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{p_k} \times 1 \overset{CS}{\leqslant} \sqrt{\sum_{k=1}^n \dfrac{1}{p_k^2}}\underbrace{\sqrt{\sum_{k=1}^n 1}}_{=\sqrt{n}}$, donc $n^4 \leqslant n \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{p_k^2}$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^n \dfrac{1}{p_k^2} \geqslant n^3$.

Autocorrection B.

En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique (avec des poids tous égaux) à $\dfrac{1}{x_1}, \ldots, \dfrac{1}{x_n} \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1/x_1 + \cdots + 1/x_n}{n} \geqslant \left(\frac{1}{x_1} \cdots \frac{1}{x_n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leqslant (x_1 \cdots x_n)^{1/n}.$$

Autocorrection C.

1. (a) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

   D'après l'inégalité arithmético-géométrique, $\dfrac{t+1/t}{2} \geqslant \sqrt{t\dfrac{1}{t}} = 1$, ce qui conclut.

   (b) On développe :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j}\right) &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{x_i}{x_j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{x_k}{x_k}}_{=1} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i}\right) \\
&\overset{*}{\geqslant} n + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 2 \\
&\geqslant n + 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} 1 \\
&\geqslant n + 2\sum_{j=1}^{n} (j-1) \\
&\geqslant n + 2\sum_{k=0}^{n-1} k \\
&\geqslant n + 2\frac{(n-1)n}{2} = n^2,
\end{aligned}$$

   où l'inégalité astérisquée s'obtient en sommant les inégalités $\dfrac{x_i}{x_j} + \dfrac{x_j}{x_i} \geqslant 2$ obtenues en appliquant la question précédente à $t = \dfrac{x_i}{x_j}$.

2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x_i}} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_i}\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}},$$

   ce qui conclut immédiatement.

Autocorrection D.

- Commençons par montrer que J est un intervalle. Soit $u, v \in J$ et $\lambda \in [0,1]$. On a

$$a\left[(1-\lambda)u + \lambda v\right] + b = (1-\lambda)\underbrace{(au+b)}_{\in I} + \lambda\underbrace{(av+b)}_{\in I} \in I,$$

  donc $(1-\lambda)u + \lambda v \in J$ ce qui conclut.

- Soit maintenant, $u, v \in J$ et $\lambda \in [0,1]$. On a

$$\begin{aligned}
g\big((1-\lambda)u + \lambda v\big) &= f\big((1-\lambda)(au+b) + \lambda(av+b)\big) \\
&\leqslant (1-\lambda)f(au+b) + \lambda f(av+b) \\
&\leqslant (1-\lambda)g(u) + \lambda g(v),
\end{aligned}$$

  ce qui conclut.

Autocorrection E.

1. Soit $a, b \in I$ et $\lambda \in [0,1]$. On a

$$\begin{aligned} & f\big((1-\lambda)a+\lambda b\big) \leqslant (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b) && \text{(f convexe)} \\ \text{donc} \quad & g\Big(f\big((1-\lambda)a+\lambda b\big)\Big) \leqslant g\big((1-\lambda)f(a)+\lambda f(b)\big) && \text{(g croissante)} \\ & \leqslant (1-\lambda)g\big(f(a)\big)+\lambda g\big(f(b)\big), && \text{(g convexe)} \end{aligned}$$

   ce qui montre que $g \circ f$ est convexe.

2. Avec les mêmes notations, on montre de même que :
   - si f est convexe et g est concave et décroissante, alors $g \circ f$ est concave ;
   - si f est concave et g est concave et croissante, alors $g \circ f$ est concave ;
   - si f est concave et f est convexe et décroissante, alors $g \circ f$ est convexe.

3. Considérons $f = \exp$ et $g : x \mapsto -x$ (affine donc convexe). La composée $g \circ f = -\exp$ n'est pas convexe (sa dérivée seconde est strictement négative).

Autocorrection F.

Soit $x_1 \leqslant x_2 \in \mathbb{R}_+$. Comme $a - x_2 \leqslant a - x_1 \leqslant a + x_2$, on peut trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$a - x_1 = (1-\lambda)(a-x_2)+\lambda(a+x_2).$$

On en déduit l'expression pour $a + x_1$, en utilisant le fait que a est à la fois le milieu des segments $[a-x_1, a+x_1]$ et $[a-x_2, a+x_2]$:

$$\begin{aligned} \frac{(a-x_1)+(a+x_1)}{2} &= \frac{(a-x_1)+(a+x_1)}{2} \\ \text{donc} \qquad a + x_1 &= (a-x_2)+(a+x_2)-(a-x_1) \\ &= \lambda(a-x_2)+(1-\lambda)(a+x_2). \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} g(x_1) &= f(a-x_1)+f(a+x_1) \\ &= f\big((1-\lambda)(a-x_2)+\lambda(a+x_2)\big)+f\big(\lambda(a-x_2)+(1-\lambda)(a+x_2)\big) \\ &\leqslant (1-\lambda)f(a-x_2)+\lambda f(a+x_2)+\lambda f(a-x_2)+(1-\lambda)f(a+x_2) \\ &\leqslant f(a-x_2)+f(a+x_2) \\ &\leqslant g(x_2). \end{aligned}$$

Autocorrection G.

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n. \end{cases}$ Cette fonction est lisse, et $f'' : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n \leqslant 1 \\ n(n-1)\,x^{n-2} & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$ est positive.

La fonction f est donc convexe.

Soit maintenant $x, y \in \mathbb{R}_+$. On a

$$\frac{(x+y)^n}{2^n} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2} = \frac{x^n+y^n}{2},$$

ce qui conclut.