Polynômes

Exercice 1.
Dans tous les cas, on pourra raisonner par analyse et synthèse et considérer rapidement le degré des polynômes en jeu.

Exercice 5.
On pourra se souvenir de la factorisation de $a^3 - b^3$...

Exercice 6.
On pourra commencer par montrer l'existence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'un polynôme Q_k vérifiant l'égalité $P(X)^k - X^k = Q_k(X)\big(P(X) - X\big)$.

Exercice 7.
De manière complètement surprenante, Alice peut déterminer le polynôme en seulement deux questions !

Exercice 9.
On peut commencer par exprimer cette somme en fonction d'une somme indexée par les entiers de 0 à $n+1$. Ensuite, utiliser une expression de $(a-b)^2$ en fonction de a^2, b^2 et $(a+b)^2$.

Exercice 10.
Pour la deuxième question, on pourra entre autres chercher une variante de la formule de convolution de Vandermonde qui peut aider.

Exercice 12.
Montrer qu'en général, l'évaluation $P(\sqrt{2})$ est de la forme $\alpha + \beta\sqrt{2}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Que peut-on dire si ce nombre est nul ?

Exercice 14.
On pourra considérer le polynôme $\overline{P}$, convenablement défini.

Exercice 21.
En notant $P = \sum_{n=0}^{d} a_n X^n$ un polynôme vérifiant la condition, on pourra commencer par montrer la condition $\forall k \in [\![-d, d]\!], \displaystyle\sum_{\substack{n,m \in [\![0,d]\!] \\ m-n=k}} \overline{a_n}\, a_m = \delta_{n,m}$.

Exercice 27.
Pour la deuxième question, on cherchera à définir des polynômes auxiliaires auxquels appliquer la première question.

Notamment, on se demandera comment fabriquer un polynôme dont les racines sont les inverses des racines de P.

Exercice 37.
Penser à la formule de Taylor.

Exercice 44.
Comment trouveriez-vous un tel A si P était un polynôme explicite ?

Exercice 45.
On pourra examiner ce qu'il se passe à droite du dernier point critique de la fonction polynomiale $t \mapsto P(t)$ (si elle en a un).

Exercice 46.
On peut raisonner en termes de tableaux de variations, ou chercher **le** résultat du cours qui donne le résultat immédiatement.

Exercice 49.
On pourra utiliser la formule explicite du polynôme interpolateur.

Exercice 50.
La condition nous invite à considérer le polynôme $Q = XP - 1$. Qu'en dire ?

Exercice 57.
On n'oubliera pas que le théorème de Rolle s'applique également à des fonctions non polynomiales !

Autocorrection

Autocorrection A.
On a

$$\begin{aligned} PQ &= 2X^5 - X^4 \quad + X^3 \\ &\qquad - 2X^4 + X^3 \quad - X^2 \\ &\qquad\qquad + 6X^3 - 3X^2 + 3X \\ &\qquad\qquad\qquad - 2X^2 + X \quad - 1 \\ &= 2X^5 - 3X^4 + 8X^3 - 6X^2 + 4X - 1. \end{aligned}$$

Par exemple en écrivant P^2 comme $P \times P$, ou en utilisant la formule $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j$, on obtient

$$\begin{aligned} P^2 &= X^6 - 2X^5 + 7X^4 - 8X^3 + 11X^2 - 6X + 1 \\ \text{et, de même, } Q^2 &= 4X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 2X + 1. \end{aligned}$$

Enfin, après calculs, (en développant notamment $(2X^2 - X + 1)^3 = (2X^2 - X + 1)^2 \times (2X^2 - X + 1)$)

$$\begin{aligned} P \circ Q &= Q^3 - Q^2 + 3Q - 1 \\ &= 8X^6 - 12X^5 + 14X^4 - 9X^3 + 10X^2 - 4X + 2. \\ \text{De même, } Q \circ P &= 2P^2 - P + 1 \\ &= 2X^6 - 4X^5 + 14X^3 - 17X^3 + 23X^2 - 15X + 4. \end{aligned}$$

Autocorrection B.

D'après le binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned}(X+1)^n &= X^n + nX^{n-1} + \cdots + 1\\ (X-1)^n &= X^n - nX^{n-1} + \cdots + (-1)^n.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}(X+1)^n - (X-1)^n &= 2nX^{n-1} + \cdots + 1 - (-1)^n\\ (X+1)^n + (X-1)^n &= 2X^n + \cdots + 1 + (-1)^n.\end{aligned}$$

Autocorrection C.

Le polynôme X^3 convient clairement. Montrons que c'est le seul.

Soit $P \in K[X]$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, P(k) = k^3$. Le polynôme $P - X^3$ a donc tous les entiers naturels comme racines. D'après le critère radical de nullité, il est nul, ce qui montre que $P = X^3$.

Autocorrection D.

Montrons qu'il n'y a pas de tel polynôme. Supposons par l'absurde pouvoir trouver $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = n^2 + (-1)^n$.

- Notons $2\mathbb{N}$ l'ensemble (infini) des entiers naturels pairs. On a $\forall n \in 2\mathbb{N}, P(n) = n^2 + 1$.
  Par rigidité des polynômes, cela montre $P = X^2 + 1$.
- Notons $2\mathbb{N} + 1$ l'ensemble (infini) des entiers naturels impairs. On a $\forall n \in 2\mathbb{N}+1, P(n) = n^2 - 1$.
  Par rigidité des polynômes, cela montre $P = X^2 - 1$.

On a ainsi obtenu la contradiction souhaitée.

Autocorrection E.

Par définition, le reste R recherché est l'unique élément $R \in K_1[X]$ tel qu'il existe $Q \in K[X]$ tel que

$$P = (X-a)(X-b)Q + R. \tag{$*$}$$

Comme $R \in K_1[X]$, on peut trouver $u, v \in K$ tel que $R = uX + v$.

En évaluant $(*)$ en a et en b, on obtient les équations

$$P(a) = (a-a)(a-b)Q(a) + R(a) = u\,a + v \qquad \text{et, de même,} \qquad P(b) = u\,b + v.$$

On a ainsi un système de deux équations à deux inconnues (u et v) :

$$\begin{cases} a\,u + v = P(a)\\ b\,u + v = P(b).\end{cases}$$

Procédons par analyse et synthèse.

Analyse. Soit (u, v) une solution du système.

- En faisant la différence des deux équations, il vient $(a-b)u = P(a) - P(b)$, d'où l'on tire $u = \dfrac{P(a)-P(b)}{a-b}$ car a et b ont été supposés distincts.
- La première équation donne alors

$$v = P(a) - au = P(a) - a\frac{P(a)-P(b)}{a-b} = \frac{a\,P(b) - b\,P(a)}{a-b}.$$

Synthèse. Réciproquement, on vérifie directement que $(u,v) = \left(\dfrac{P(a)-P(b)}{a-b}, \dfrac{a\,P(b)-b\,P(a)}{a-b}\right)$ est bien solution du système.

Notre système a donc une unique solution : $(u,v) = \left(\dfrac{P(a)-P(b)}{a-b}, \dfrac{a\,P(b)-b\,P(a)}{a-b}\right)$.

Ainsi,

$$R = \frac{P(a)-P(b)}{a-b}X + \frac{a\,P(b)-b\,P(a)}{a-b}$$

(qui est bien l'expression de l'unique polynôme de degré $\leqslant 1$ valant $P(a)$ en a et $P(b)$ en b).

Autocorrection F.

En calculant les premières valeurs, on conjecture rapidement que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P_n = k^n\,X^k.$$

On montre alors facilement cette propriété par récurrence.

Autocorrection G.

- Par combinaison linéaire, le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} L_k$ appartient à $K_n[X]$ et vérifie, pour tout $j \in [\![0,n]\!]$,

$$P(x_j) = \sum_{k=0}^{n} L_k(x_j) = \sum_{k=0}^{n} \delta_{k,j} = 1.$$

  Les polynômes P et 1, éléments de $K_n[X]$, coïncident donc en $n+1$ points, donc $P = 1$.
- De même, $Q = \sum_{k=0}^{n} x_k\,L_k$ appartient à $K_n[X]$ et vérifie, pour tout $j \in [\![0,n]\!]$,

$$Q(x_j) = \sum_{k=0}^{n} x_k\,L_k(x_j) = \sum_{k=0}^{n} x_k\,\delta_{k,j} = x_j,$$

  donc Q et $X \in K_n[X]$ coïncident en $n+1$ points, et sont donc égaux.

Autocorrection H.

On a

- $P(1) = 1-(2n+1)+(2n+1)-1 = 0$, donc 1 est racine de P.
- $P' = (2n+1)X^{2n} - (2n+1)(n+1)X^n + (2n+1)nX^{n-1}$, donc

$$\begin{aligned} P'(1) &= (2n+1)-(2n+1)(n+1)+(2n+1)n \\ &= 0, \end{aligned}$$

  donc 1 est racine de P'.
- $P'' = (2n+1)(2n)X^{2n-1} - (2n+1)(n+1)nX^{n-1} + (2n+1)n(n-1)X^{n-2}$ donc

$$\begin{aligned} P''(1) &= (2n+1)(2n)-(2n+1)(n+1)n+(2n+1)n(n-1) \\ &= (2n+1)n\,[2-(n+1)+(n-1)] \\ &= 0, \end{aligned}$$

  donc 1 est racine de P''.

- $P''' = (2n+1)(2n)(2n-1)X^{2n-2} - (2n+1)(n+1)n(n-1)X^{n-2} + (2n+1)n(n-1)(n-2)X^{n-3}$ donc

  $$\begin{aligned} P'''(1) &= (2n+1)(2n)(2n-1) - (2n+1)(n+1)n(n-1) + (2n+1)n(n-1)(n-2) \\ &= (2n+1)n\,[2(2n-1) - (n+1)(n-1) + (n-1)(n-2)] \\ &= (2n+1)n\,[4n-2-(n-1)\,[(n+1)-(n-2)]] \\ &= (2n+1)n(n+1) \neq 0, \end{aligned}$$

  donc 1 n'est pas racine de P'''.

D'après le lien avec les dérivées, on a donc $\mu_1(P) = 3$.