
Matrices

Généralités

Autocorrection A.



Calculer les produits suivants (les résultats devraient être simples).

$$(i) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 11 & -9 \\ 1 & 11 & -9 & 1 \\ 11 & -9 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad (ii) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & 8 & 5 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -12 & -4 \\ -35 & 42 & 13 \\ 44 & -52 & -16 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.

Soit $v \in \mathbb{R}^n$ un vecteur, que l'on voit comme une matrice colonne. Que dire si $v^T v = 0$?

Exercice 2.



Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ et $J \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer JMJ .

Exercice 3.



Déterminer deux matrices carrées A et B de $M_2(\mathbb{K})$ telles que :

- (i) $AB = 0$ et $BA \neq 0$.
- (ii) $AB = 0$, $BA = 0$, $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

Exercice 4.



Étant donné une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, on définit sa *norme de Frobenius* $\|A\|_F = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Exprimer $\|A\|_F$ en fonction des coefficients de A . Quid si $\|A\|_F = 0$?
2. Montrer que la norme de Frobenius est *sous-multiplicative*, c'est-à-dire

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F.$$

3. L'égalité $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \|AB\|_F = \|A\|_F \|B\|_F$ a-t-elle une chance d'être vraie ?

Exercice 5.



Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $S(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Calculer la somme $S(a, b) + S(c, d)$ et le produit $S(a, b)S(c, d)$. En déduire en particulier que $S(a, b)$ et $S(c, d)$ commutent.
2. Calculer le produit $S(a, b)S(a, b)^T$.
3. À quelle condition la matrice $S(a, b)$ est-elle inversible ? Le cas échéant, donner son inverse.
4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Calculer la puissance n -ième de la matrice $S(\cos \theta, \sin \theta)$.

Exercice 6.

On pose


$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{C}^2 \right\} \subseteq M_2(\mathbb{C}).$$

1. Montrer que l'ensemble \mathbb{H} est stable par somme et par produit.
2. Déterminer l'ensemble des matrices inversibles de \mathbb{H} . Montrer que l'inverse d'une telle matrice est encore un élément de \mathbb{H} .

Exercice 7.

Déterminer les matrices $X \in M_2(\mathbb{R})$ à coefficients entiers telles que $X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8.

Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que toute matrice carrée d'ordre n s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. 

Exercice 9⁺.

Soit $n \geq 2$. Montrer qu'il n'existe pas de couple $(P, Q) \in M_n(\mathbb{K})^2$ tel que $PQ - QP = I_n$. 

Commutation

Exercice 10.

Soit $A, B \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $AB \in S_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $AB = BA$.

Exercice 11.

Soit $d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbb{K}$ tous distincts et $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) \in M_n(\mathbb{K})$. 



Déterminer l'ensemble des matrices $A \in M_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec D .

Exercice 12.

Soit $d_1, d_2, \dots, d_n \in \mathbb{K}$ tous distincts. On pose $d_{n+1} = d_n$ et $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n, d_{n+1}) \in M_{n+1}(\mathbb{K})$.

Déterminer l'ensemble des matrices $A \in M_{n+1}(\mathbb{K})$ qui commutent avec D .

Exercice 13.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall B \in M_n(\mathbb{K}), AB = BA$ (on dit que A est dans le *centre* de $M_n(\mathbb{K})$).  

Montrer que A est une matrice scalaire.


Exercice 14⁺.

Soit $A \in T_n^+(\mathbb{R})$ une matrice commutant avec sa transposée. Montrer que A est diagonale.

Exercice 15⁺.

Soit $n \geq 2$. Déterminer l'ensemble des matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices antisymétriques. 

Exercice 16⁺⁺.

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent. 

Puissances

Autocorrection B. ☑

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin x \\ -1 & 0 & \cos x \\ -\sin x & \cos x & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculer A^3 puis les puissances de $I_3 + A$.

Exercice 17. ☑

Calculer les puissances successives des matrices suivantes (a et b désignent des paramètres complexes, θ un paramètre réel, n est un nombre entier ≥ 1).

(i) aI_n ;

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

(iv) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$;

(v) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(vi) $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$;

(vii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(viii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(ix) $J_n = (1)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(\mathbb{C})$;

(x) $\begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \ddots & \vdots \\ b & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & b & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 18. _____

Soit $L \in M_{1,n}(\mathbb{C})$ et $C \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. Calculer, pour tout $p \geq 0$, les puissances $(LC)^p$ et $(CL)^p$.

Exercice 19. _____

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{K})$.

1. Calculer A^4 .
2. Montrer que A est inversible si et seulement si $x \neq 0$.
3. Lorsque $x \neq 0$, déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 20. _____

Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$. On note $A = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Exprimer A comme le produit d'une colonne et d'une ligne.
2. En déduire les puissances de A .

Exercice 21. ☑

Soit $x, \theta \in \mathbb{R}$. Calculer les puissances de

$$\begin{pmatrix} x + \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & x - \sin \theta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Exercice 22. ☑

Soit $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer $(A - I_2)^2$.
2. Déterminer le reste dans la division euclidienne de X^{100} par $(X - 1)^2$.
3. En déduire A^{100} .

Exercice 23. ☑

1. Soit $A, B, C \in M_n(K)$ tels que $\forall k \in \{1, 2, 3\}, A^k = B + kC$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k = B + kC$.
2. Donner des exemples (pas trop triviaux) de matrices A, B et C vérifiant cette propriété.

Exercice 24⁺. ☑

On dit qu'une matrice carrée est *nilpotente* si l'une de ses puissances est nulle.

Soit A et B deux matrices nilpotentes qui commutent. Montrer que $A + B$ et AB sont également nilpotentes. Que dire si l'on enlève l'hypothèse de commutativité ?

Exercice 25⁺. 💡☑

Soit $T \in M_n(K)$ une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont nuls.

Montrer que T^n est nulle.

Inversibilité

Exercice 26. ☑

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - A$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

Exercice 27. ☑

Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in T_n^+(K)$ est inversible, et déterminer son inverse.

Exercice 28.

Soit $n \geq 2$. Pour $a, b \in \mathbb{C}$, on définit $M = M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Calculer M^2 en fonction de M et de I_n .
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $M(a, b)$ soit inversible, et exprimer l'inverse, le cas échéant.

Exercice 29⁺ (Matrice de Fourier).

Soit $n \geq 1$ et $\omega = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)$. On pose $F = \left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Calculer \overline{FF} . En déduire que $F \in GL_n(\mathbb{C})$ et calculer son inverse.

Exercice 30.

1. Soit $M \in M_n(K)$. On suppose qu'il existe des scalaires $a_0, a_1, a_2, \dots, a_d$ tels que

$$a_0 I_n + a_1 M + a_2 M^2 + \cdots + a_d M^d = 0$$

et qu'en outre, $a_0 \neq 0$. Montrer que M est inversible et déterminer son inverse.

2. Pour $n \geq 2$, la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients diagonaux sont nuls et dont tous les autres coefficients valent 1 est-elle inversible ?

Exercice 31⁺.

1. Soit $M \in M_n(K)$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $M^p = 0$. Montrer que $I_n - M$ est inversible et déterminer son inverse.

2. En déduire que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 32⁺.

Montrer que toute matrice de $M_n(K)$ est somme de deux matrices inversibles.

Calculs par blocs

Autocorrection C.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2 et M^3 .
2. Conjecturer une formule générale pour $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$, et la démontrer.

Exercice 33.

Soit $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{K})$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

- Déterminer M^T .
- À quelle condition la matrice M est-elle symétrique ?

Exercice 34.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On définit les matrices par blocs

$$N = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} I_n & A & 0 \\ 0 & I_n & A \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} A & A & 0 \\ 0 & A & A \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}.$$

Calculer successivement $(N^k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(U^k)_{k \in \mathbb{N}}$, et $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Exercice 35.

- Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $L \in M_{1,n}(\mathbb{K})$. On pose $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & L \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{K})$.
 - Déterminer une expression de \tilde{A}^k , pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
 - En déduire que si $r \in \mathbb{N}$ vérifie $A^r = 0$, alors $\tilde{A}^{r+1} = 0$.
- Montrer que si tous les coefficients diagonaux de $M \in T_n^+(\mathbb{K})$ sont nuls, alors $M^n = 0$.

Exercice 36.

- Déterminer toutes les matrices commutant avec la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{K})$.
- Même question avec la matrice $\begin{pmatrix} \lambda I_n & 0 \\ 0 & \mu I_n \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{K})$, quel que soit le couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.

Exercice 37.

Soit $A_{1,1} \in M_n(\mathbb{K})$, $A_{2,2} \in M_m(\mathbb{K})$ et $A_{1,2} \in M_{n,m}(\mathbb{K})$.

- Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{pmatrix} \in M_{n+m}(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si les blocs diagonaux $A_{1,1}$ et $A_{2,2}$ le sont.
- On suppose $A_{1,1}$ et $A_{2,2}$ inversibles. Déterminer M^{-1} .

Exercice 38⁺.

Soit $\tilde{M} = \begin{pmatrix} M & C \\ L & m \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{K})$ une matrice par blocs, où $M \in GL_n(\mathbb{K})$.

Montrer que \tilde{M} est inversible si et seulement si $m \neq LM^{-1}C$ (où l'on a identifié $LM^{-1}C \in M_1(\mathbb{K})$ à son unique coefficient).