
Systèmes linéaires

Exercice 10.

On pourra chercher une condition linéaire vérifiée par les trois colonnes de la matrice de droite, pour éliminer certaines valeurs de m .

Exercice 11.

On pourra commencer par montrer le résultat dans le cas où A est échelonnée réduite, puis utiliser le théorème admis (et hors-programme) sur les matrices échelonnées réduites pour se ramener à ce cas particulier.

Exercice 19.

1. On pourra montrer que le système $MX = 0$ n'a que la solution nulle.
2. On pourra utiliser des opérations élémentaires pour se ramener à une matrice à laquelle la première question peut s'appliquer.

Exercice 20.

On essayera d'utiliser le critère nucléaire d'inversibilité.

Autocorrection

Autocorrection A.

Voici les différents ensembles de solutions.

$$(i) \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\};$$

$$(ii) \left\{ \begin{pmatrix} 11z - 8 \\ -7z + 5 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{K} \right\};$$

$$(iii) \emptyset;$$

$$(iv) \emptyset;$$

$$(v) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} \right\};$$

$$(vi) \left\{ \begin{pmatrix} 4/5 - 19/45 t \\ 7/5 + t/15 \\ 1/5 - t/45 \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{K} \right\};$$

$$(vii) \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} - \frac{1}{5}t - \frac{6}{5}u \\ \frac{17}{5} - \frac{1}{5}t - \frac{1}{5}u \\ -\frac{33}{5} - \frac{11}{5}t - \frac{11}{5}u \\ t \\ u \end{pmatrix} \mid (t, u) \in \mathbb{K}^2 \right\};$$

$$(viii) \emptyset;$$

$$(ix) \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} \right\};$$

$$(x) \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\};$$

$$(xi) \left\{ \left(\begin{array}{c} -1 \\ \frac{3}{2} - z \\ z \\ \frac{3}{2} \end{array} \right) \middle| z \in \mathbb{K} \right\};$$

$$(xii) \left\{ \left(\begin{array}{c} \frac{24}{7} + \frac{6}{7}z + \frac{3}{7}t - \frac{4}{7}u \\ -\frac{13}{7} - \frac{12}{7}z + \frac{1}{7}t + \frac{1}{7}u \\ z \\ t \\ u \end{array} \right) \middle| (z, t, u) \in \mathbb{K}^3 \right\}.$$

Autocorrection B.

Voici les ensembles de solutions.

$$(i) \left\{ \left(\begin{array}{c} \frac{s+d}{2} \\ \frac{s-d}{2} \end{array} \right) \right\}.$$

(ii) On a l'équation de compatibilité $3 + a + b = 0$. Si elle est vérifiée, l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} b+1 \\ z-3b-4 \\ z \end{array} \right) \middle| z \in \mathbb{K} \right\}; \text{ sinon, il est vide.}$$

(iii) Le système n'est compatible que si $a = 1$ et $b = -1$ ou si $a = -1$ et $b = 1$. Dans ce cas, l'unique

$$\text{solution en est } \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(iv) Si $m = 1$, le système a pour ensemble de solutions $\left\{ \left(\begin{array}{c} 1-y-z \\ y \\ z \end{array} \right) \middle| (y, z) \in \mathbb{K}^2 \right\}$. Si $m = -2$, le système a une unique solution : $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dans tous les autres cas, le système est incompatible.

(v) Si $a = 1$, le système a pour ensemble de solutions $\left\{ \left(\begin{array}{c} 1-y-z \\ y \\ z \end{array} \right) \middle| (y, z) \in \mathbb{K}^2 \right\}$. Si $a = -2$, le

système est incompatible. Dans tous les autres cas, le système a une unique solution : $\begin{pmatrix} \frac{1}{a+2} \\ \frac{1}{a+2} \\ 1 \\ \frac{1}{a+2} \end{pmatrix}$.

(vi) Si $a = -4$, le système est incompatible. Sinon, il admet une unique solution : $\begin{pmatrix} \frac{3a^2 - 2a - 6}{a+4} \\ -2a^2 + 2a + 5 \\ a+4 \\ \frac{a-1}{a+4} \end{pmatrix}$.

(vii) Si $a + 2b = 0$, le système a pour ensemble de solutions $\left\{ \left(\begin{array}{c} b+4z-t \\ -3b-8z-3t \\ z \\ t \end{array} \right) \middle| (z, t) \in \mathbb{K}^2 \right\}$. Si ce n'est pas le cas, il est incompatible.

(viii) Si $p = 2q - 2r$, le système a une unique solution, que l'on peut noter $\begin{pmatrix} \frac{s - 2q - 2r}{9} \\ \frac{4q - 5r - 2s}{9} \\ \frac{5q - 4r + 2s}{9} \end{pmatrix}$. Dans le cas contraire, le système est incompatible.

Autocorrection C.

On peut traiter les premiers exemples par l'application vue en cours du pivot de Gauss.

► Non inversible.

► Inversible, d'inverse $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

► Inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

► Non inversible.

► Inversible, d'inverse $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -4 & 3i & 2i \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

► Notons M la matrice. Après les premières transvections, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & \bar{z} & \bar{z}^2 \\ 0 & 1 - |z|^2 & \bar{z}(1 - |z|^2) \\ 0 & z(1 - |z|^2) & 1 - |z|^4 \end{pmatrix}.$$

Si $z \in \mathbb{U}$, les deux dernières lignes sont nulles, donc M n'est pas inversible.

Si ce n'est pas le cas, on peut dilater les deux dernières lignes et obtenir

$$\begin{pmatrix} 1 & \bar{z} & \bar{z}^2 \\ 0 & 1 & \bar{z} \\ 0 & z & |z|^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

En continuant le calcul avec des bimatrices, on obtient qu'alors M est inversible et

$$M^{-1} = \frac{1}{|z|^2 - 1} \begin{pmatrix} 1 & \bar{z} & 0 \\ z & 1 + |z|^2 & \bar{z} \\ 0 & z & 1 \end{pmatrix}.$$

► En effectuant successivement les transvections

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2, \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3, \dots, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n,$$

on arrive à la matrice triangulaire supérieure n'ayant que des 1 au-dessus de la diagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

En effectuant à nouveau les mêmes transvections

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2, \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3, \dots, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n,$$

on obtient alors I_n .

En refaisant ces opérations sur I_n on obtient successivement

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{puis} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est donc l'inverse recherché.

► Faisons le calcul avec des bimatrices.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 & n-1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{array} \right) \quad (*)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \end{array} \right) \quad (\ddagger)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{n-2}{n-1} & \frac{-1}{n-1} & \frac{-1}{n-1} & \dots & \frac{-1}{n-1} & \frac{-1}{n-1} \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{-1}{n-1} & \frac{n-1}{n-2} & \frac{-1}{n-1} & \dots & \frac{-1}{n-1} & \frac{-1}{n-1} \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & \frac{-1}{n-1} & \frac{-1}{n-1} & \frac{n-1}{n-2} & \dots & \frac{-1}{n-1} & \frac{-1}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \frac{-1}{n-1} & \frac{-1}{n-1} & \frac{-1}{n-1} & \dots & \frac{n-2}{n-1} & \frac{-1}{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \dots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \end{array} \right) \quad (\ddagger)$$

$$\begin{aligned}
& \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|cccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{n-1}{1} & \frac{n-1}{2-n} & \frac{n-1}{1} & \cdots & \frac{n-1}{1} & \frac{n-1}{1} \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{n-1}{1} & \frac{n-1}{1} & \frac{n-1}{2-n} & \cdots & \frac{n-1}{1} & \frac{n-1}{1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \frac{n-1}{1} & \frac{n-1}{1} & \frac{n-1}{1} & \cdots & \frac{n-1}{1} & \frac{n-1}{1}
\end{array} \right) \quad (\boxtimes) \\
& \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|cccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{n-1}{1} & \frac{n-1}{2-n} & \frac{n-1}{1} & \cdots & \frac{n-1}{1} & \frac{n-1}{1} \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{n-1}{1} & \frac{n-1}{1} & \frac{n-1}{2-n} & \cdots & \frac{n-1}{1} & \frac{n-1}{1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{n-1}{1} & \frac{n-1}{1} & \frac{n-1}{1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{2-n}{n-1}
\end{array} \right) \quad (\star)
\end{aligned}$$

Explications :

- (*) transvections successives $L_n \leftarrow L_n + L_i$, pour $1 \leq i \leq n-1$;
- (†) dilatation $L_n \leftarrow \frac{1}{n-1} L_n$;
- (‡) transvections successives $L_i \leftarrow L_i - L_n$, pour $1 \leq i \leq n-1$;
- (⊗) dilatations successives $L_i \leftarrow -L_i$, pour $1 \leq i \leq n-1$;
- (★) transvections successives $L_n \leftarrow L_n - L_i$, pour $1 \leq i \leq n-1$.

Donc la matrice est inversible, d'inverse

$$\frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2-n \end{pmatrix}.$$