
Nombres réels

Autocorrection A.

Soit a un réel tel que $\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon$. Que peut-on dire de a ?

Partie entière

Autocorrection B.

Soit $a \leq b$ deux réels. Montrer que $\left| [a, b] \cap \mathbb{Z} \right| = [b] + [1 - a]$.

Exercice 1.

Soit x et y deux réels. Montrer les assertions suivantes.

(i) $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left\lfloor \frac{[nx]}{n} \right\rfloor = [x]$.

(iii) $[2x] = [x] + [x + 1/2]$.

Exercice 2⁺.

Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, [x] + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor = [nx]$.

Exercice 3.

Étudier la périodicité des fonctions réelles $x \mapsto [3x] - 3x$ et $x \mapsto \frac{x}{2} - \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$. Dessiner leurs graphes.

Exercice 4.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\} = x - [x]$ la partie fractionnaire de x .

Résoudre le système d'équations
$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 1,1 \\ [x] + \{y\} + z = 2,2 \\ \{x\} + y + [z] = 3,3. \end{cases}$$

Exercice 5.

Montrer $\forall x, y \in \mathbb{R}, [x] + [x + y] + [y] \leq [2x] + [2y]$.

Exercice 6⁺⁺.

Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor$.

Bornes supérieure et inférieure

Autocorrection C. ✓

Soit A et B deux parties non vides de \mathbb{R} telles que $A \subseteq B$. On suppose que B est bornée. Montrer que A est bornée et comparer les bornes supérieures et inférieures de A et de B.

Autocorrection D. ✓

Déterminer, si elles existent, les bornes des ensembles suivants et préciser s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

(i) $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\};$

(v) $\left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\};$

(ii) $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \{0\};$

(vi) $\left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\};$

(iii) $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\};$

(vii) $\left\{ (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n} \right) \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}.$

(iv) $]a, b[$, pour deux réels $a < b$;

Exercice 7.

On pose $E = \left\{ \left| \frac{\cos(n)}{n} \right| \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Déterminer $\inf E$ et $\sup E$.

(On pourra admettre $\cos(1) > 1/2$).

Exercice 8.

Soit $E = \left\{ 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}^* \right\}$. Montrer que E est borné et déterminer ses bornes.

Exercice 9. 💡

Soit $a_1 < \dots < a_n$ des réels. Déterminer $\inf \left\{ \sum_{i=1}^n |x - a_i| \mid x \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 10.

Soit A une partie non vide et majorée de \mathbb{R} .

1. On suppose $\sup A > 0$. Montrer qu'il existe un élément de A strictement positif.
2. On suppose $\sup A \geq 0$. Existe-t-il un élément de A positif ?

Exercice 11. ✓

Soit A et B deux parties non vides et majorées de \mathbb{R} et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} -A &= \{-x \mid x \in A\}, & \lambda A &= \{\lambda x \mid x \in A\}, \\ A + B &= \{x + y \mid (x, y) \in A \times B\}, & A + \lambda &= \{x + \lambda \mid x \in A\}. \end{aligned}$$

1. Montrer que $A \cup B$ est majoré et que l'on a $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
2. On suppose que A et B ne sont pas disjoints. Montrer que $A \cap B$ est majoré et que l'on a l'inégalité $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))$. Donner un exemple où cette inégalité est stricte.
3. Montrer que $-A$ est minoré et que l'on a $\inf(-A) = -\sup(A)$.
4. Montrer que $A + \lambda$ est majoré et que l'on a $\sup(A + \lambda) = \sup(A) + \lambda$.
5. Montrer que $A + B$ est majoré et que l'on a $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
6. Si $\lambda > 0$, montrer que λA est majoré et que l'on a $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$. Que peut-on dire si $\lambda < 0$ ou $\lambda = 0$?

Exercice 12.

Soit A une partie non vide et minorée de \mathbb{R} .

On note m la borne inférieure de A et on pose $B = A \cap]-\infty, m + 1]$. Déterminer $\inf B$.

Exercice 13.

Soit A et B deux parties non vides de \mathbb{R} .

1. On suppose $\forall x \in A, \forall y \in B, x \leq y$. Montrer que A est majorée, que B est minorée et que l'on a $\sup A \leq \inf B$.
2. (a) L'hypothèse plus forte $\forall x \in A, \forall y \in B, x < y$ permet-elle de conclure $\sup B < \inf A$?
(b) Même question avec l'hypothèse $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in A, \forall y \in B, y - x \geq \varepsilon$.

Exercice 14.

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ une partie non vide bornée.

1. Montrer que la borne supérieure $\sup \{ |x - y| \mid (x, y) \in A^2 \}$ est bien définie. On l'appelle *diamètre* de A , et on la note $\text{diam}(A)$.
2. Montrer que $\text{diam } A = \sup A - \inf A$.

Exercice 15.

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} et $x \in \mathbb{R}$. On appelle *distance* de x à A le réel

$$d(x, A) = \inf \{ |x - a| \mid a \in A \}.$$

1. Justifier que $d(x, A)$ est bien définie.
2. Montrer $\forall x, y \in \mathbb{R}, |d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|$.
3. Montrer que $\bar{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, A) = 0\}$.

Exercice 16 (Théorème du point fixe pour les fonctions croissantes).

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction croissante. On veut montrer que f possède un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x$. On pose $E = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \leq x\}$.

1. Montrer que E possède une borne inférieure m .
2. Montrer que $f(m)$ minore E .
3. Montrer $f[E] \subseteq E$.
4. En déduire que m est un point fixe de f .

Ce résultat est-il toujours vrai si l'on remplace $[0, 1]$ par $[0, 1[$?

Densité

Autocorrection E. _____

Soit $k > 1$ un réel. On note

$$D_k = \left\{ \frac{n}{k^m} \mid n \in \mathbb{Z} \text{ et } m \in \mathbb{N} \right\}.$$

1. Montrer que si $r < s$ sont deux réels tels que $s - r > 1$, alors le segment $[r, s]$ contient un entier.
2. En déduire que D_k est dense.
3. Comment le résultat précédent permet-il de redémontrer la densité de \mathbb{Q} ?

Exercice 17⁺. _____

Soit $E = \{ \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \mid n \in \mathbb{N} \}$.

1. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
2. Déterminer $\inf E$ et $\sup E$.
3. Montrer que E est dense dans $[0, 1]$, c'est-à-dire que son adhérence est $[0, 1]$.

Exercice 18⁺. _____

1. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.
2. Montrer que $\{ \cos(\ln n) \mid n \in \mathbb{N}^* \}$ est dense dans $[-1, 1]$, c'est-à-dire que son adhérence est $[-1, 1]$.

Exercice 19⁺⁺. _____

Montrer que $\{ \sqrt{n} - \sqrt{m} \mid n, m \in \mathbb{N} \}$ est dense.

Exercice 20. _____

Soit $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux parties denses.

1. Montrer que $A + B = \{ a + b \mid a \in A, b \in B \}$ est dense.
2. Montrer que $AB = \{ ab \mid a \in A, b \in B \}$ est dense.