Suites I

Exercice 7.
Pour la deuxième question, on pourra commencer par trouver une suite particulière vérifiant la relation.

Exercice 19.
Pour la deuxième question, on procèdera par l'absurde et on essayera de trouver un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que l'on puisse facilement écrire e, u_n et v_n comme trois fractions avec le même dénominateur.

Exercice 21.
Pour la première question, étudier les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 24.
Pour la deuxième question, on pourra utiliser le $DL_1(0)$ de $h \mapsto \ln(1+h)$.

Exercice 25.
S'inspirer de la preuve du théorème de Cesàro.

Exercice 28.
On pourra introduire la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\max(u_n, u_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 31.
Dans la première question, on pourra penser à faire la division euclidienne de m par n.

Exercice 35.
On pourra commencer par montrer que si $(|q_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$, alors il existe une extractrice θ telle que $\left(q_{\theta(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite constante (pour cela, on pourra commencer par construire – par récurrence – une sous-suite bornée).

Exercice 38.
Exprimer z_n sous forme algébrique.

Exercice 40.
Pour la première question, on pourra utiliser les formules d'addition pour exprimer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide de deux termes successifs de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et réciproquement.

Exercice 41.
On pourra développer le produit pour les petites valeurs de n, afin de démontrer par récurrence que le terme général de la suite admet une autre forme, plus facilement exploitable.

Autocorrection

Autocorrection A.

Voilà les solutions.

Pour les huit premières questions, on est dans le cadre des théorèmes du cours sur les suites vérifiant des relations de récurrence simple. Pour les quatre dernières, le plus facile est de calculer les premières valeurs, en déduire une conjecture, puis démontrer cette dernière par récurrence (mais ce n'est pas la seule possibilité).

(i) $\forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = -\frac{7}{2}(-2)^k$ (suite géométrique) ;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{6}{2^n}$ (suite géométrique) ;

(iii) $\forall p \in \mathbb{N}, u_p = 10 + 3p$ (suite arithmétique) ;

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}, 6 - \frac{5}{3^n}$ (suite arithmético-géométrique) ;

(v) $\forall i \in \mathbb{N}, u_i = \frac{1}{3 \cdot 4^i} - \frac{1}{3}$ (suite arithmético-géométrique) ;

(vi) $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = 2 - k$ (récurrence linéaire d'ordre 2) ;

(vii) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{4}{3 \cdot 2^n}$ (récurrence linéaire d'ordre 2) ;

(viii) $\forall m \in \mathbb{N}, u_m = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{13}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{13}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n$ (récurrence linéaire d'ordre 2) ;

(ix) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ -2 & \text{si } n > 0 \end{cases}$;

(x) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n(n+1)}{2}$;

(xi) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n}$;

(xii) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{2^n - 1}$.

Autocorrection B.

(i) Le polynôme caractéristique est $X^2 - 2X - 3$ dont les racines sont (après calcul) -1 et 3. On en déduit qu'on peut trouver deux nombres réels R et S tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = R\,3^n + S\,(-1)^n$.

En identifiant les premiers termes, on obtient le système $\begin{cases} R + S = 1 \\ 3R - S = 1 \end{cases}$, dont l'unique racine est (après calcul) $(R, S) = (1/2, 1/2)$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3^n + (-1)^n}{2}.$$

(ii) Le polynôme caractéristique est $X^2 - 4X + 4$, dont la racine (double) est 2. On en déduit qu'on peut trouver deux nombres réels A et B tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (A + Bn)\,2^n$.

En identifiant les premiers termes, on obtient le système $\begin{cases} A = 1 \\ 2A + 2B = 6 \end{cases}$, dont l'unique racine est (après calcul) $(R, S) = (1, 2)$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (2n + 1)2^n.$$

(iii) Il s'agit de la suite nulle (par une récurrence double immédiate, ou par la formulation matricielle).

(iv) Le polynôme caractéristique $X^2 - 2X + 2$ a pour racines $1 \pm i$, que l'on peut mettre sous forme exponentielle : $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. On sait alors qu'on peut trouver deux nombres réels U et V tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{2}\left(U\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + V\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

En identifiant les premiers termes, on obtient le système $\begin{cases} U & = 2 \\ U + V = 1 \end{cases}$, dont l'unique racine est $(U, V) = (2, -1)$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{2}^n\left(2\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Autocorrection C.

(i) La suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc

$$\frac{\cos n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}\frac{n + (-1)^n}{n^2 + 1} &= \frac{n}{n^2}\frac{1 + (-1)^n/n}{1 + 1/n^2} \\ &= \frac{1}{n}\frac{1 + (-1)^n/n}{1 + 1/n^2}.\end{aligned}$$

On a $(-1)^n/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (produit d'une suite bornée et d'une suite tendant vers 0). On en déduit que $1 + (-1)^n/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Comme $1 + 1/n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on en déduit $\dfrac{1 + (-1)^n/n}{1 + 1/n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, puis, comme $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a

$$\frac{n + (-1)^n}{n^2 + 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(iii) Soit $n \geqslant 1$. On a

$$\frac{(-1)^n + n}{(-1)^n + 2} \geqslant \frac{n-1}{3},$$

cette dernière quantité étant le terme général d'une suite tendant vers $+\infty$, on a, par minoration,

$$\frac{(-1)^n + n}{(-1)^n + 2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

(iv) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\frac{e^n + n^2}{n^4 + 1} = \frac{e^n}{n^4}\frac{1 + n^2/e^n}{1 + 1/n^4}.$$

Par croissance comparée, on a $n^2/e^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Comme par ailleurs $1 + 1/n^4 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on a $\dfrac{1 + n^2/e^n}{1 + 1/n^4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Toujours par croissance comparée, on a $\dfrac{e^n}{n^4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc

$$\frac{e^n + n^2}{n^4 + 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

(v) Soit $n \geqslant 3$. On a $\dfrac{\ln n + 1}{n+4} = \dfrac{\ln n}{n} \dfrac{1 + 1/\ln n}{1 + 4/n}$. Comme le numérateur et le dénominateur de la deuxième fraction tendent vers 1, on a $\dfrac{1 + 1/\ln n}{1 + 4/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Par ailleurs, par croissance comparée, $\dfrac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc

$$\frac{\ln n + 1}{n+4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(vi) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}\frac{3^n + (-2)^n}{3^n - (-2)^n} &= \frac{3^n}{3^n} \frac{1 + (-2/3)^n}{1 - (-2/3)^n} \\ &= \frac{1 + (-2/3)^n}{1 - (-2/3)^n}.\end{aligned}$$

On a $1 \pm \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donc

$$\frac{3^n + (-2)^n}{3^n - (-2)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

(vii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} &= \sqrt{n} \left[\sqrt{1 + 1/n} - \sqrt{1 - 1/n}\right] \\ &= \sqrt{n} \frac{\left(\sqrt{1 + 1/n} - \sqrt{1 - 1/n}\right)\left(\sqrt{1 + 1/n} + \sqrt{1 - 1/n}\right)}{\left(\sqrt{1 + 1/n} + \sqrt{1 - 1/n}\right)} \\ &= \sqrt{n} \frac{(1 + 1/n) - (1 - 1/n)}{\left(\sqrt{1 + 1/n} + \sqrt{1 - 1/n}\right)} \\ &= \sqrt{n} \frac{2/n}{\sqrt{1 + 1/n} + \sqrt{1 - 1/n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2}{\sqrt{1 + 1/n} + \sqrt{1 - 1/n}}.\end{aligned}$$

Le numérateur et le dénominateur de la deuxième fraction tendent tous deux vers 2, donc ladite fraction tend vers 1. Comme $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on en déduit

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(viii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n} &= \sqrt{n^2} \left[\sqrt{1 + 1/n} - \sqrt{1 - 1/n}\right] \\ &= n \frac{2/n}{\sqrt{1 + 1/n} + \sqrt{1 - 1/n}} && \text{(calcul précédent)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 + 1/n} + \sqrt{1 - 1/n}}\end{aligned}$$

Le numérateur et le dénominateur de la fraction tendent tous deux vers 2, donc

$$\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

(ix) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\dfrac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} \leqslant \dfrac{\sqrt{n}}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Comme $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on en déduit, par minoration, que

$$\frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(x) Soit $n \geqslant 2$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{n^n} &= \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n}{n \times n \times n \times \cdots \times n \times n} \\
&= \frac{1}{n} \times \underbrace{\frac{2}{n}}_{\leqslant 1} \times \underbrace{\frac{3}{n}}_{\leqslant 1} \times \cdots \times \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leqslant 1} \times \underbrace{\frac{n}{n}}_{=1} \\
&\leqslant \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Par majoration, on a donc

$$\frac{n!}{n^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Autocorrection D.

1. On va montrer que la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente. Ajouté aux résultat du cours selon lequel la somme de deux suites convergentes est convergente, cela permet de remplir la « table d'addition » suivante.

$+$	convergente	divergente
convergente	convergente	divergente
divergente	divergente	?

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergente et divergente, respectivement. Montrons que $(c_n + d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Supposons au contraire, par l'absurde, que $(c_n + d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

L'écriture $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c_n + d_n)_{n\in\mathbb{N}} - (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ exprime alors $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme différence de deux suites convergentes, ce qui montre qu'elle converge, et constitue une contradiction.

En revanche, le « ? » ne peut pas être rendu plus précis : il peut arriver que la somme de deux suites divergentes diverge (comme par exemple $(2n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}} + (n)_{n\in\mathbb{N}}$) mais aussi qu'elle converge (comme par exemple $(0)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}} + (-n)_{n\in\mathbb{N}}$).

2. Pour le produit, le cours affirme que le produit de deux suites convergentes converge, ce qui donne la « table de multiplication » suivante.

$\times$	convergente	divergente
convergente	convergente	?
divergente	?	?

On ne peut rien dire de plus : le produit d'une suite convergente et d'une suite divergente peut aussi bien converger (par exemple $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \times (n)_{n\in\mathbb{N}^*}$) que diverger (par exemple $(n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \times \left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$) et, de la même façon, le produit de deux suites divergentes peut converger (par exemple $(1)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} \times ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$) ou diverger (par exemple $(n^2)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}} \times (n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Autocorrection E.

Il est possible de faire des démonstrations proches de celles des théorèmes « d'opérations » du cours, et c'est d'ailleurs un bon entraînement, mais on peut directement utiliser ces théorèmes.

En effet, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$, alors

$$\begin{aligned} & \min(u_n, v_n) = \frac{u_n + v_n - |u_n - v_n|}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ell_1 + \ell_2 - |\ell_1 - \ell_2|}{2} = \min(\ell_1, \ell_2) \\ \text{et} \qquad & \max(u_n, v_n) = \frac{u_n + v_n + |u_n - v_n|}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ell_1 + \ell_2 + |\ell_1 - \ell_2|}{2} = \max(\ell_1, \ell_2), \end{aligned}$$

par opérations.

Autocorrection F.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite périodique non constante. Soit $T \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+T} = u_n$.

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non constante, on peut trouver deux indices n_0 et n_1 tels que $u_{n_0} \neq u_{n_1}$.

Par une récurrence immédiate, on montre alors que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left(u_{n_0+kT} = u_{n_0} \text{ et } u_{n_1+kT} = u_{n_1}\right).$$

On définit alors les deux applications

$$\varphi_0 : \begin{cases} \mathbb{N} \to & \mathbb{N} \\ k \mapsto & n_0 + kT \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \varphi_1 : \begin{cases} \mathbb{N} \to & \mathbb{N} \\ k \mapsto & n_1 + kT, \end{cases}$$

qui sont clairement des extractrices. D'après ce qui précède, les sous-suites $\left(u_{\varphi_0(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(u_{\varphi_1(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes les deux constantes, mais prennent des valeurs différentes.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet alors deux sous-suites qui ne convergent pas vers la même limite. Comme dans le cas de $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ traité en cours, cela implique qu'elle diverge.