Suites I

Généralités

Autocorrection A. ☑

Exprimer en fonction de n le terme général des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ou $(u_n)_{n>0}$ suivantes.

(i) $u_1 = 7$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_{k+1} = -2u_k$;

(ii) $u_1 = 3$ et $\forall n \geqslant 2,\ 2u_n = u_{n-1}$;

(iii) $u_0 = 10$ et $\forall p \in \mathbb{N},\ u_{p+1} - u_p = 3$;

(iv) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{u_{n-1}}{3} + 4$;

(v) $u_0 = 0$ et $\forall i \geqslant 0,\ 4u_{i+1} + 1 = u_i$;

(vi) $u_0 = 2, u_1 = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = 0$;

(vii) $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 2u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0$;

(viii) $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ u_{m+1} = u_m + 3u_{m-1}$;

(ix) $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{-1}{2}u_n^2$;

(x) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_{n-1} + n$;

(xi) $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1}$;

(xii) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n^2$.

Exercice 1. ☑

Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ou $(u_n)_{n>0}$ définie par les expressions suivantes.

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dbinom{n}{p}$ (pour un certain $p \in \mathbb{N}$) ;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}$;

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n!}{2^n}$;

(iv) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln k - n \ln n$;

(v) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$;

(vi) $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{3u_n^2}{1 + 4u_n}$.

Exercice 2^{++}.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle non bornée et $C > 0$. Montrer que $\exists p, q \in \mathbb{N} : |u_p - u_q| > C$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles non bornées et $C > 0$. Montrer que
$$\exists p, q \in \mathbb{N} : |u_p - u_q| > C \text{ et } |v_p - v_q| > C.$$
3. Montrer que le résultat correspondant pour trois suites est faux.

Suites récurrentes

Autocorrection B.

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression générale de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses premiers termes et une relation de récurrence.

(i) $u_0 = 1, \qquad u_1 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n.$

(ii) $u_0 = 1, \qquad u_1 = 6, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n.$

(iii) $u_0 = 0, \qquad u_1 = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{2}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n.$

(iv) $u_0 = 2, \qquad u_1 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0.$

Exercice 3.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = 2u_n + n$.

1. Montrer qu'il existe une suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la même relation de récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En étudiant la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 4.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 5^n$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n/5^n$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique ; en déduire l'expression de son terme général.
2. En déduire l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5.

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites réelles définies par

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ b_0 = -1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n. \end{cases}$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = a_n + b_n$ et $v_n = 2a_n - b_n$. Calculer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En déduire l'expression de a_n et b_n en fonction de n.

Exercice 6.

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = -2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique ; en déduire l'expression de son terme général.
2. En déduire une relation de récurrence satisfaite par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer l'expression du terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7.

1. Déterminer toutes les suites réelles bornées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0.$$
2. Déterminer toutes les suites réelles bornées $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} - 5v_{n+1} + 6v_n = 12\,(-1)^n.$$

Exercice 8$^+$.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(f(x)) = 6x - f(x)$ et $\forall x > 0, f(x) > 0$.

Convergence

Calculs et opérations

Autocorrection C. ☑

Étudier la convergence des suites $(u_n)_n$ dont les termes généraux sont les suivants.

(i) $\dfrac{\cos n}{n+1}$;

(ii) $\dfrac{n+(-1)^n}{n^2+1}$;

(iii) $\dfrac{(-1)^n+n}{(-1)^n+2}$;

(iv) $\dfrac{e^n+n^2}{n^4+1}$;

(v) $\dfrac{\ln n+1}{n+4}$;

(vi) $\dfrac{3^n+(-2)^n}{3^n-(-2)^n}$;

(vii) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$;

(viii) $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}$;

(ix) $\dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$;

(x) $\dfrac{n!}{n^n}$.

Autocorrection D. ☑

1. Peut-on déterminer la nature (convergente ou divergente) de la somme de deux suites si l'on connaît la nature des deux suites ?

   On traitera tous les cas, en fournissant suivant les cas une preuve ou un contre-exemple.
2. Même question pour le produit.

Autocorrection E. ☑

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes.

Montrer que $\big(\min(u_n, v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\max(u_n, v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Exercice 9.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} \cos(2\pi n!x)^{2m}$?

Exercice 10.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente. Que peut-on dire de la suite $(\lfloor u_n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 11. ☑

Soit $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Construire deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 1 et $+\infty$, respectivement, telles que $u_n^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Exercice 12. ☑

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer qu'il existe une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Autres théorèmes de convergence

Exercice 13 (Définition de $\zeta(2)$).

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Étudier la monotonie de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.
3. En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 14.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $T_{n+1} = \frac{T_n + S_n}{3}$.
3. En déduire que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 15.

Montrer que la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}$ est convergente et préciser sa limite.

Exercice 16.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer la nature de la suite $\left(\frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+p)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 17.

Étudier la convergence des trois suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ dont les termes généraux sont les suivants.

(i) $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$; (ii) $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$; (iii) $\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} k!$.

Exercice 18.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0, 1]$ telles que $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Qu'en dire ?

Exercice 19⁺ (Irrationalité de e).

On définit les suites

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \qquad \text{et} \qquad (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(u_n + \frac{1}{n\,n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

1. Montrer qu'il s'agit de deux suites adjacentes.
2. On admet que la limite de ces deux suites est e. En déduire que e est irrationnel.

Exercice 20.

Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies ci-dessous par leurs termes généraux sont adjacentes.

(i) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ et $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$;

(ii) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$

Exercice 21 (Critère spécial des séries alternées).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. Montrer que $\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 22⁺.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle et $(C_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. Montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $C_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que si $(u_n)_n$ est monotone et que $(C_n)_n$ converge, alors $(u_n)_n$ converge.
3. Montrer que si $(u_n)_n$ est bornée, alors $(C_n)_n$ est bornée. La réciproque est-elle vraie ?
4. Montrer que si $(u_n)_n$ est croissante, alors $(C_n)_n$ est croissante. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 23.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\,u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 24.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à valeurs strictement positives.

1. Montrer que s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
2. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ et $\lim_{n\to+\infty} \binom{2n}{n}^{1/n}$.

Exercice 25⁺.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k v_{n+1-k}.$$

Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le produit des limites.

Mélange

Exercice 26.

Montrer que toute suite d'entiers naturels convergente est stationnaire.

Exercice 27 (Critère de D'Alembert).
Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs strictement positives et $\ell \in \mathbb{R}$ telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

1. Montrer que si $\ell < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que si $\ell > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
3. Montrer que l'on ne peut rien dire si $\ell = 1$.

Exercice 28$^+$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \leqslant \dfrac{u_n + u_{n+1}}{2}$. Montrer qu'elle converge.

Exercice 29$^+$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $E = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

1. On suppose $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Montrer que E admet un minimum.
2. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que E admet un extremum.

Exercice 30$^+$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels deux à deux distincts. Montrer $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 31$^+$ (Lemme sous-additif de Fekete).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite positive *sous-additive*, c'est-à-dire telle que

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, u_{n+m} \leqslant u_n + u_m.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall m \geqslant N, \dfrac{u_m}{m} \leqslant \dfrac{u_n}{n} + \delta$.
2. Montrer que
$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \inf\left\{\frac{u_k}{k} \,\middle|\, k \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Suites extraites

Autocorrection F.
Montrer que toute suite périodique non constante diverge.

Exercice 32.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente telle que $\big((-1)^n u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également. Que peut-on dire ?

Exercice 33.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$.

Montrer que si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 34.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et admet une suite extraite convergente. Que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et admet une suite extraite majorée. Que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 35$^+$.

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ deux suites d'entiers telles que $\dfrac{p_n}{q_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \notin \mathbb{Q}$. Montrer que

$$|p_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad |q_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

Exercice 36^{++}.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer qu'il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $u_{\varphi(n)} - n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 37 (Théorème de Bolzano-Weierstrass par le lemme des pics).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit $E = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \forall k > n, u_k < u_n\}$.

1. Montrer que si E est infini, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite décroissante.
2. Montrer que si E est fini, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite croissante.
3. Déduire de ce qui précède une nouvelle preuve du *théorème de Bolzano-Weierstrass*.

Suites à valeurs complexes

Exercice 38.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = 3z_n - \bar{z}_n$. Déterminer une expression explicite du terme général z_n.

Exercice 39.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{4}z_n + \frac{3}{4}\overline{z_n}.$$

Étudier la convergence de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer le cas échéant sa limite.

Exercice 40.

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

Exercice 41$^+$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

Déterminer si la suite $\left(\prod_{k=0}^{n}\left(1 + z^{2^k}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et, le cas échéant, déterminer sa limite.