Suites II

Exercice 3.
On pourra penser à l'encadrement grossier, et au logarithme.

Exercice 13.
On reviendra à une traduction, avec des ε, de l'hypothèse asymptotique.

Exercice 22.
Dans la deuxième question, on pourra calculer la fonction $f_{n+1} - f_n$.

Dans la troisième, on pourra commencer par montrer l'existence de $\ell \in \mathbb{R}_+$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Autocorrection

Autocorrection A.

(i) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$;

(ii) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3n}$;

(iii) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$;

(iv) $u_n = \dfrac{1}{n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$;

(v) $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)$;

(vi) $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$;

(vii) $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(n)$;

(viii) $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Autocorrection B.
De la plus forte à la plus faible :

- $u_n = 1 + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$: (v) ;
- $u_n = 1 + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$: (viii) ;
- $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$: (i), (ii), (iv), (vii) ;
- $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(1)$: (ix), (x) ;
- $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$: (vi) ;
- $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(n)$: (iii).

Autocorrection C.

L'inégalité de l'énoncé donne (grâce à l'hypothèse de positivité !)

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant \frac{v_n}{u_n} \leqslant \frac{w_n}{u_n}.$$

Comme $\frac{w_n}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$, le théorème des gendarmes donne $\frac{v_n}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$, donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$.

Autocorrection D.

Il n'y a pas d'implication logique :

- les suites $(n+n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient $n + n^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} n^2$ mais pas $n + n^2 = n^2 + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$;
- les suites $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifient $\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$ mais pas $\frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.
  Remarque. Ces suites ne sont pas définies sur $\mathbb{N}$ mais il est facile de contourner cette difficulté, soit en les prolongeant de façon arbitraire à $\mathbb{N}$, soit en les décalant, c'est-à-dire en considérant $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, etc. On ignore ici cette subtilité.

Autocorrection E.

(i) $\frac{3n^4 - 2n^2 + 1}{2n^3 + 1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{3}{2}n$;

(ii) $\frac{\ln n + n + 1}{3n^2 + 2n + 1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{3n}$;

(iii) $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$;

(iv) $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$;

(v) $\sin \sin \frac{\pi}{n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{n^2}$;

(vi) $\frac{n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\tan \frac{\pi}{n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^2}{\pi}$;

(vii) $\ln(n+2) - \ln(n+1) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$;

(viii) $(2n + \ln n^2)e^{-(n+1)} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2ne^{-(n+1)}$;

(ix) $\frac{\ln(n^2+1)}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2\frac{\ln n}{n}$;

(x) $\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt[3]{n}$;

(xi) $\frac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{5(\ln n)^3 - 2n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{n}{2}$;

(xii) $\frac{n! + e^n}{2^n + 3^n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n!}{3^n}$;

(xiii) $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{2}{n^2}$;

(xiv) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$;

(xv) $\sqrt{\ln(n+1) - \ln(n-1)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n}}$.

Autocorrection F.

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{u_n^2} \geqslant 0$, donc $u_{n+1} \geqslant u_n$. Il s'ensuit (par récurrence) que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien à valeurs strictement positive, bien définie, et croissante.

D'après le théorème de la limite monotone, on sait donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend soit vers une limite finie, soit vers $+\infty$.

Supposons par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On peut trouver $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$. Le théorème de la limite monotone entraîne même $\ell \geqslant u_0 = 1$.

Par continuité de $x \mapsto x + \frac{1}{x^2}$ en ℓ, la limite ℓ doit vérifier $\ell = \ell + \frac{1}{\ell^2}$, ce qui entraîne $\frac{1}{\ell^2} = 0$, la contradiction souhaitée.

On a donc montré $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

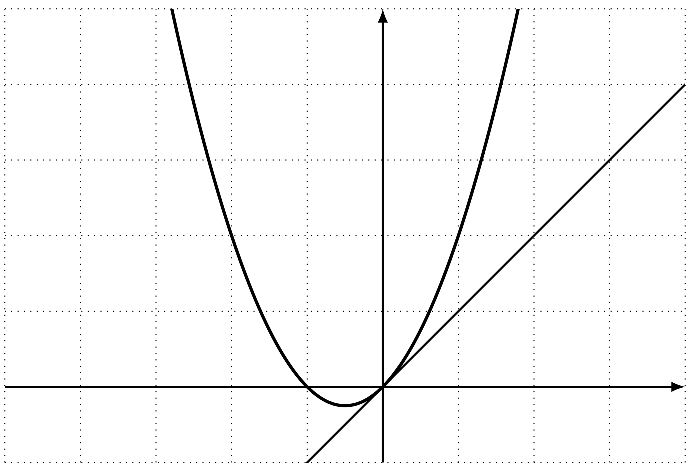
Autocorrection G.

On commence par étudier les fonctions

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x + x^2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g = f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2. \end{cases}$$

Notamment, on observe que g s'annule en 0 mais qu'elle est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$.

x	$-\infty$		-1		$-1/2$		0		$+\infty$
f'		$-$			0			$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-1/4$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
g		$+$					0	$+$	



On observe que le segment $I = \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ est stable sous f, car $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} \geqslant -\frac{1}{2}$, qu'il contient u_0 et que la fonction f y est croissante.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc à valeurs dans I et monotone. Comme $u_1 = -\frac{1}{4} \geqslant -\frac{1}{2} = u_0$, elle est même croissante. Comme elle est à valeurs dans le segment I, elle est bornée.

Le théorème de la limite monotone entraîne qu'elle converge : on peut ainsi trouver $\ell \in I$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Par continuité de f, cette limite doit vérifier $f(\ell) = \ell$. On a donc $\ell = 0$, car c'est l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire l'unique zéro de g).

In fine, on a montré $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.