Dérivation

Exercice 5.
Essayer de représenter graphiquement g pour comprendre l'enjeu.

Exercice 12.
On peut procéder par analyse et synthèse. Dans la phase d'analyse, on peut fixer une des variables, par exemple y. On obtient ainsi une égalité entre deux fonctions d'une variable, que l'on peut dériver.

Exercice 14.
On ne peut pas dériver une fonction dont le domaine est $\mathbb{N}^*$. Il faut donc se ramener à une fonction définie sur un intervalle pour utiliser les outils du cours.

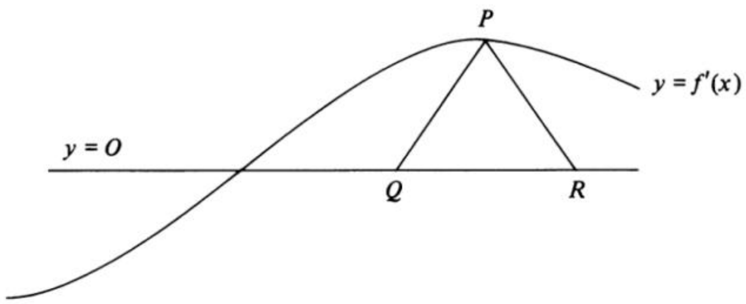
Exercice 17.
On pourra faire un dessin, puis chercher une fonction dont les points critiques sont pertinents dans le problème.

Exercice 31.
Penser au théorème de la limite de la dérivée.

Exercice 42.
Ce n'est pas la seule façon de faire, mais une démonstration très rapide peut être obtenue en appliquant le théorème de Rolle à une fonction très judicieuse.

Exercice 45.
Voilà un commentaire d'un grand analyste anglais, John E. Littlewood (1885-1977) :

> *If* $f' \neq o(1)$*, the graph* $y = f'(x)$ *will for some arbitrarily large* x *have 'peaks' (above or below* $y = 0$*) enclosing triangles like* PQR*, the height of* P *not small, the slopes of* PQ, PR *not large, and so the area* PQR *not small. Then* $f(Q) - f(R)$ *is not small, contradicting* $f = O(1)$*. This is rigorous (and printable), in the sense that in translating into symbols no step occurs that is not both unequivocal and trivial. For myself I think like this wherever the subject matter permits.*



Exercice 47.
On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis et constater que le nombre $P\left(\frac{a}{b}\right)$ est un rationnel sur lequel on possède des informations.

Exercice 48.
On pourra entre autres calculer $Q - Q'$.

Autocorrection

Autocorrection A.

(i) **Faux.** Si l'on prend $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a = 0$, on a, pour tout $h \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{h^2}{h} \\ &= h \\ \text{mais} \quad f'(a) &= 2 \times 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc on a $\forall h \in \mathbb{R}^*, \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} \neq f'(a)$, ce qui montre que l'assertion proposée est fausse.

(ii) **Faux.** Prenons $f : x \mapsto |x|$ et $a = 0$. On sait que f n'est pas dérivable en 0 (elle est à la fois dérivable à gauche et à droite mais $f'_g(0) = -1 \neq 1 = f'_d(0)$), alors que, quel que soit $x \neq a$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| &= \left| \frac{|x|}{x} \right| \\ &= 1, \end{aligned}$$

donc il n'est pas vrai que la valeur absolue $\left| \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \right|$ tende vers $+\infty$ en 0.

(iii) **Faux.** Prenons $a = -1$, $b = 1$, $c = 0$ et $f : x \mapsto |x|$. On sait que f n'est pas dérivable en 0 (donc pas dérivable sur $[-1, 1]$). En revanche, les deux restrictions $f_{|[-1,0]}$ et $f_{|[0,1]}$ sont affines (la première est $x \mapsto -x$, la seconde $x \mapsto x$), donc dérivables.

(iv) **Faux.** La fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \to & \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto & \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

est dérivable et de dérivée nulle (car elle coïncide, au voisinage de tout $a < 0$ avec la fonction constante -1 et au voisinage de tout $a > 0$ avec la fonction constante 1). Pourtant, cette application n'est pas constante.

(v) **Vrai.** La fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est un exemple.

(vi) **Faux.** L'idée est de prendre une fonction qui oscille violemment, où la rapidité des oscillations va faire « exploser » la dérivée.
Par exemple, considérons la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to & \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto & \dfrac{1}{x} \sin(x^3). \end{cases}$$

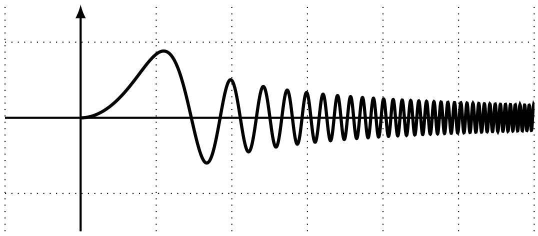
On a $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ grâce au théorème des gendarmes et à l'encadrement $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, |f(x)| \leqslant \dfrac{1}{x}$.
En revanche, f, qui est dérivable par opérations, vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2} \sin(x^3) + \frac{1}{x} 3x^2 \cos(x^3) \\ &= 3x \cos(x^3) - \frac{1}{x^2} \sin(x^3). \end{aligned}$$

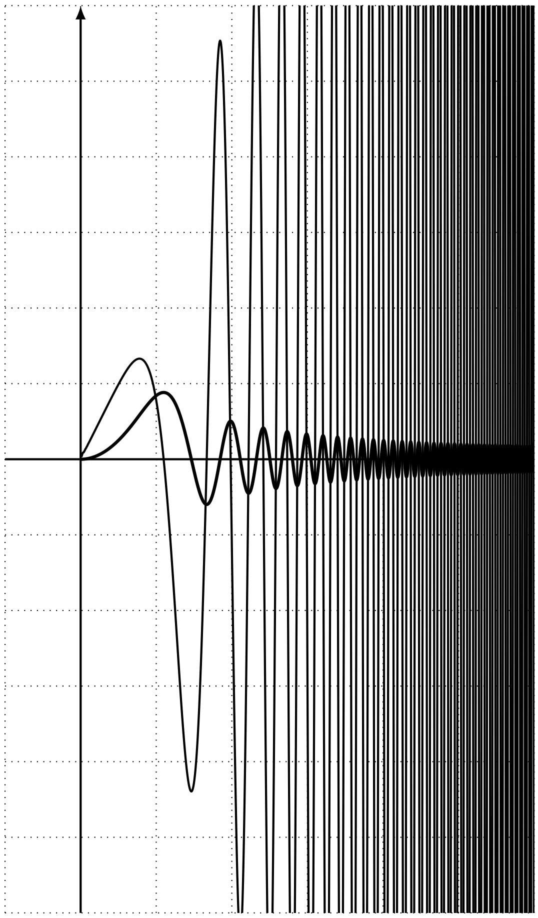
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt[3]{2n\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et

$$\begin{aligned} f'(u_n) &= 3\sqrt[3]{2n\pi}\cos(2n\pi) - \frac{1}{(2n\pi)^{2/3}}\sin(2n\pi) \\ &= 3\sqrt[3]{2n\pi} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty, \end{aligned}$$

ce qui démontre que f' ne tend pas vers 0 en $+\infty$.
On peut objecter que f n'est pas définie sur $\mathbb{R}_+$, mais il suffit alors de considérer $x \mapsto f(x+1)$ pour régler ce problème.



f



f et f'

Autocorrection B.

On peut montrer $f'(0) \geqslant 0$.

En effet, on peut trouver $\eta \in]0,1]$ tel que $\forall x \in [0,\eta], f(x) \geqslant f(0)$. Quel que soit $h \in [0,\eta]$, on a

$$f(h) \geqslant f(0) \quad \text{donc} \quad \frac{f(h)-f(0)}{h} \geqslant 0.$$

Par passage à la limite dans les inégalités larges, on a donc

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \geqslant 0.$$

En revanche, on ne peut conclure $f'(0) = 0$, comme le montre l'exemple de $x \mapsto x$.

Autocorrection C.

Considérons la fonction

$$f : \begin{cases} [0,1] & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto ax^4 + bx^3 + cx^2. \end{cases}$$

Cette fonction est lisse par opérations. En particulier, elle est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.

D'après le théorème des accroissements finis, on peut trouver $x \in]0,1[$ tel que

$$f'(x) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c.$$