

---

## Applications linéaires

---

**Exercice 5.**

On pourra s'inspirer de la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique.

**Exercice 9.**

On pourra montrer que si c'était le cas,  $\ker D$  contiendrait une famille libre de deux vecteurs.

**Exercice 22.**

Attention : si  $x \neq 0_E$ , dire que  $x$  et  $u(x)$  sont colinéaires signifie que l'on peut trouver un scalaire  $\lambda_x$  **dépendant de**  $x$  tel que  $u(x) = \lambda_x x$ . Il n'y a *a priori* aucune raison que tous les  $\lambda_x$  valent la même chose, c'est précisément ce qu'il faut montrer !

**Exercice 31.**

3. On pourra utiliser la propriété universelle de la somme directe pour définir  $f^\#$  séparément sur  $\ker f$  et  $\text{im } f$ , après avoir remarqué que  $f$  induisait un automorphisme de  $\text{im } f$ .

## Autocorrection

**Autocorrection A.**

Dans toutes les questions, on note  $\varphi$  l'application de l'énoncé.

- (i) **Non linéaire.** Par exemple,  $\varphi(1, 0) = \varphi(0, 1) = 0$ , alors que  $\varphi(1, 1) = 1 \neq \varphi(1, 0) + \varphi(0, 1)$ .  
 (ii) **Non linéaire.** Par exemple,  $\varphi(0, 0, 0) = (1, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$ .  
 (iii) **Linéaire.** On peut vérifier les deux axiomes, mais il est plus simple de constater qu'il s'agit de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{K}).$$

- (iv) **Non linéaire.** Par exemple,  $\varphi(0) = 1 \neq 0$ .  
 (v) **Non linéaire.** Par exemple,  $\varphi(-1) = 1 \neq -1 = -1 \times \varphi(1)$ .  
 (vi) **Non linéaire.** Le domaine n'est même pas un espace vectoriel.  
 (vii) **Non linéaire.** Par exemple,  $\varphi(2, 0) = 4 \neq 2 = 2 \times 1 = 2 \varphi(1, 0)$ .

- (viii) **Linéaire.** Il s'agit de l'application linéaire canoniquement associée à  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K})$ .

- (ix) **Non linéaire.** Par exemple,  $\varphi((1, 2)) = 1$  alors que

$$\varphi(-(1, 2)) = \varphi((-1, -2)) = -2.$$

- (x) **Linéaire.** Soit  $P, Q \in K[X]$  et  $\lambda \in K$ . On a

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X^2) \\ &= \lambda P(X^2) + Q(X^2) \\ &= \lambda \varphi(P) + \varphi(Q). \end{aligned}$$

(xi) **Non linéaire.** Par exemple,  $\varphi(2X) = 4X^2 \neq 2X^2 = 2\varphi(X)$ .

(xii) **Linéaire.** Vérifions-le méthodiquement.

Remarquons déjà que l'application est bien définie car, si  $f \in C^2(\mathbb{R})$ , alors  $f''$ ,  $f'$  et  $f$  sont toutes continues (au moins), donc  $f'' - 2f' + f$  aussi.

► Soit  $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ . On a

$$\begin{aligned}\varphi(f+g) &= (f+g)'' - 2(f+g)' + (f+g) \\ &= f'' + g'' - 2f' - 2g' + f + g \\ &= \varphi(f) + \varphi(g).\end{aligned}$$

► Soit  $f \in C^2(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f) &= (\lambda f)'' - 2(\lambda f)' + \lambda f \\ &= \lambda f'' - 2\lambda f' + \lambda f \\ &= \lambda \varphi(f).\end{aligned}$$

Cela montre que  $\varphi$  est linéaire.

(xiii) **Linéaire.**

► Soit  $f, g \in C^0(\mathbb{R})$ . On a

$$\begin{aligned}\varphi(f+g) &= (f+g)(1) + (f+g)(-1) \\ &= f(1) + g(1) + f(-1) + g(-1) \\ &= \varphi(f) + \varphi(g).\end{aligned}$$

► Soit  $f \in C^0(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda f) &= (\lambda f)(1) + (\lambda f)(-1) \\ &= \lambda f(1) + \lambda f(-1) \\ &= \lambda \varphi(f).\end{aligned}$$

Cela montre que  $\varphi$  est linéaire.

(xiv) **Non linéaire.** Si par exemple  $f \in C^0(\mathbb{R})$  est la fonction constante  $x \mapsto 1$ , on a  $f^2 = (-f)^2 = f$ , donc

$$\varphi(-f) = (-f)^2 - 2f = -f \neq -3f = -(f^2 + 2f) = -\varphi(f).$$

(xv) **Non linéaire.** Si par exemple  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  est la fonction constante  $x \mapsto 1$ , on a

$$\varphi(-f) = |(-f)(0)| = 1 \neq -1 = -f(0) = -\varphi(f).$$

(xvi) **Non linéaire.** Si par exemple  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  est la fonction constante  $x \mapsto 1$ , on a

$$\varphi(-f) = \int_0^1 (-1)^2 dx = 1 \neq -1 = -\int_0^1 1^2 dx = -\varphi(f).$$

(xvii) **Linéaire.** On remarque déjà que l'application est bien définie car la dérivée  $n$ -ième d'une application de classe  $C^n$  est continue.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $P(n)$  l'assertion

$$\forall f, g \in C^n(\mathbb{R}), (f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \quad \text{et} \quad \forall f \in C^n(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}.$$

Montrons  $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$  par récurrence. Cela montrera en particulier que  $\varphi$  est linéaire.

**Initialisation.** L'énoncé pour  $n = 0$  est immédiat (car la dérivée zéroième d'une application est la fonction elle-même).

**Hérédité.** Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $P(n)$ . Vérifions les deux parties de l'assertion  $P(n+1)$ .

► Soit  $f, g \in C^{n+1}(\mathbb{R})$ . On a

$$\begin{aligned} (f+g)^{(n+1)} &= \left( (f+g)^{(n)} \right)' \\ &= \left( f^{(n)} + g^{(n)} \right)' && \text{d'après } P(n) \\ &= \left( f^{(n)} \right)' + \left( g^{(n)} \right)' \\ &= f^{(n+1)} + g^{(n+1)}. \end{aligned}$$

► De même,

$$\begin{aligned} (\lambda f)^{(n+1)} &= \left( (\lambda f)^{(n)} \right)' \\ &= \left( \lambda f^{(n)} \right)' && \text{d'après } P(n) \\ &= \lambda \left( f^{(n)} \right)' \\ &= \lambda f^{(n+1)}, \end{aligned}$$

Cela achève la preuve de  $P(n+1)$  et, partant, de la récurrence.

(xviii) **Linéaire.** Les applications  $f \mapsto \lim_{\pm\infty} f$  sont linéaires d'après le cours sur les limites. On conclut par stabilité par combinaison linéaire de  $\mathcal{L}(C^0(\mathbb{R}; \mathbb{C}); \mathbb{C})$ .

#### Autocorrection B.

Dans tous les cas, l'application est l'application linéaire canoniquement associée à une matrice, que l'on se contente de préciser. On donne ensuite le noyau et l'image de ladite application (ou de la matrice, c'est pareil).

(i)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ . On a  $\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\text{im } A = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

(ii)  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . On a  $\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  et  $\text{im } A = \mathbb{R}^3$  (la matrice est inversible).

(iii)  $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . On a  $\ker C = \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\text{im } C = \mathbb{R}^2$ .

(iv)  $D = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . On a  $\ker D = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  et  $\text{im } D = \mathbb{R}^2$  (la matrice est inversible).

#### Autocorrection C.

1. ► Commençons par montrer que  $T_n$  est bien défini.

Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ .

- On a  $\deg P' \leq \deg P \leq n$ , donc  $P' \in \mathbb{R}_n[X]$ . En effectuant à nouveau le même raisonnement, on en déduit  $P'' \in \mathbb{R}_n[X]$ .
- Comme  $\mathbb{R}_n[X]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\omega^2 P \in \mathbb{R}_n[X]$ .

Par stabilité par combinaison linéaire,  $P'' + \omega^2 P \in \mathbb{R}_n[X]$ .

► Montrons que  $T_n$  est linéaire : soit  $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a alors

$$\begin{aligned} T_n(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)'' + \omega^2(\lambda P + Q) \\ &= \lambda P'' + Q'' + \lambda \omega^2 P + \omega^2 Q && \text{(linéarité de la dérivation)} \\ &= \lambda(P'' + \omega^2 P) + (Q'' + \omega^2 Q) \\ &= \lambda T_n(P) + T_n(Q). \end{aligned}$$

Cela montre que  $T_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ .

2. On a

- $T_n(1) = 0 + \omega^2 \times 1 = \omega^2$ ;
- $T_n(X) = 0 + \omega^2 X = \omega^2 X$ ;
- Pour tout  $r \geq 2$ ,  $T_n(X^r) = r(r-1)X^{r-2} + \omega^2 X^r = \omega^2 X^r + (r^2 - r)X^{r-2}$ .

En particulier, on voit que  $\forall r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\deg T_n(X^r) = r$  : la famille  $(T_n(1), T_n(X), \dots, T_n(X^n))$  est donc échelonnée au sens fort, ce qui montre qu'il s'agit d'une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

L'endomorphisme  $T_n$  envoie donc la base canonique sur une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ , ce qui montre qu'il s'agit d'un automorphisme.

3. ► Le fait que  $T_n$  soit un automorphisme montre qu'il existe  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  tel que  $T_n(P) = X^n$ , et donc qu'il existe au moins une solution polynomiale (de degré  $\leq n$ ) à l'équation différentielle.
- Par ailleurs, comme, pour tout  $j < n$ , l'application linéaire  $T_j$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_j[X]$ , ce qui montre que l'équation différentielle n'a pas de solution de degré  $< n$ .  
En particulier, le polynôme  $P$  obtenu au point précédent appartient à  $\mathbb{R}_n[X] \setminus \mathbb{R}_{n-1}[X]$ , c'est-à-dire que  $\deg P = n$ .
- Enfin, l'équation différentielle ne possède pas de solution polynomiale de degré  $d > n$ , car cela donnerait naissance à un polynôme  $Q$  de degré  $d$  (et donc  $\neq P$ ) tel que  $T_d(Q) = X^n$ .  
On aurait donc  $T_d(P) = T_d(Q)$ , ce qui contredit l'injectivité de  $T_d$ .

*In fine*, l'équation différentielle possède une unique solution polynomiale, qui est de degré  $n$ .

## Autocorrection D.

---

- Supposons  $f[E_1] \subseteq f[E_2]$ .
- Soit  $x \in E_1$ . Par hypothèse, il existe  $x' \in E_2$  tel que  $f(x) = f(x')$ . On a donc  $x - x' \in \ker f$ , donc  $x \in E_2 + \ker f$ .
  - Tautologiquement,  $\ker f \subseteq E_2 + \ker f$ .

Le sous-espace vectoriel  $E_2 + \ker f$  contient donc à la fois  $E_1$  et  $\ker f$ , donc il contient  $E_1 + \ker f$ .

- Supposons  $E_1 + \ker f \subseteq E_2 + \ker f$ .

Soit  $y \in f[E_1]$ . On peut donc trouver  $x \in E_1$  tel que  $y = f(x)$ . Par hypothèse, on peut trouver  $x' \in E_2$  et  $x_0 \in \ker f$  tels que  $x = x' + x_0$ . On a alors

$$y = f(x) = f(x') + f(x_0) = f(x') \in f[E_2],$$

ce qui montre que  $f[E_1] \subseteq f[E_2]$ .

1. ► Soit  $u \in F \cap G$ . Comme  $u \in G = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ , on peut trouver  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$u = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 3\lambda \end{pmatrix}.$$

L'appartenance de  $u$  à  $F$  se traduit en l'égalité

$$\lambda + \lambda - 3\lambda = 0, \quad \text{donc} \quad -\lambda = 0 \quad \text{donc} \quad \lambda = 0.$$

On a donc bien  $u = 0$ , et on a montré l'inclusion  $F \cap G \subseteq \{0\}$ . L'autre inclusion étant automatique, on a bien  $F \cap G = \{0\}$ , donc  $F$  et  $G$  sont bien en somme directe.

- Montrons  $F + G = \mathbb{R}^3$ . L'autre inclusion étant automatique, il suffit de prouver  $\mathbb{R}^3 \subseteq F + G$ .

Soit  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ .

Cherchons un scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in F$ . On a les équivalences

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in F &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - \lambda \\ y - \lambda \\ z - 3\lambda \end{pmatrix} \in F \\ &\Leftrightarrow (x - \lambda) + (y - \lambda) - (z - 3\lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + y - z + \lambda = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = -x - y + z. \end{aligned}$$

Ainsi, si on pose  $\lambda = -x - y + z$ , on a  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in F$ , donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in G} \in F + G.$$

On a donc bien montré

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus G.$$

2. En suivant le raisonnement de la première question, on obtient  $\lambda = -1$  puis la décomposition

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in G},$$

donc la projection de  $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  sur  $F$  parallèlement à  $G$  est  $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ .

3. On raisonne comme à la question précédente : on trouve  $\lambda = 1$  puis la décomposition

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in G},$$

donc la projection de  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$  sur  $G$  parallèlement à  $F$  est  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

#### Autocorrection F.

---

1. Il s'agit de la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

2. On a  $A^2 = 9I_3$ , donc  $f^2 = \varphi_A^2 = \varphi_{A^2} = \varphi_{9I_3} = 9 \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ .

3. D'après la question précédente,  $\left(\frac{1}{3}f\right)^2 = \frac{1}{9}f^2 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ .

D'après la caractérisation des symétries,  $\frac{1}{3}f$  est donc une symétrie.

4. L'application  $s = \frac{1}{3}f$  est un automorphisme (c'est une symétrie), donc  $f$  qui est la composée de  $s$  et de l'homothétie  $3 \text{id}_{\mathbb{R}^3}$  en est également un.

L'égalité  $f^2 = 9 \text{id}_{\mathbb{R}^3}$  montre directement que

$$f \circ \left(\frac{1}{9}f\right) = \left(\frac{1}{9}f\right) \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}^3},$$

donc

$$f^{-1} = \frac{1}{9}f.$$