
Dimension

Généralités

Autocorrection A. ✓

1. Donner une base de $\text{Vect}((1, -1, 1), (0, -1, 2), (1, -2, 3))$.
2. En déduire que $\text{Vect}((1, -1, 1), (0, -1, 2), (1, -2, 3)) = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$.

Autocorrection B. ✓

Soit $t \in \mathbb{R}$. On définit $D_t = \text{Vect}(t, t, 1)$ et $P_t = \text{Vect}((1, t, 1), (2, 1, 1))$.

1. Montrer que D_t et P_t sont deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 , dont on précisera la dimension.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $t \in \mathbb{R}$ pour que l'on ait $D_t \oplus P_t = \mathbb{R}^3$.

Exercice 1. ✓

Donner une base et la dimension des espaces vectoriels suivants.

- (i) $E = \text{Vect}((1, 2, 1, 0), (4, -2, 1, 1), (7, 2, 4, 2), (11, 4, 1, 3))$;
- (ii) $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2y - z + 2t = 0 \text{ et } 3y - 2z + t = 0\}$.

Exercice 2. ✓

Soit (e_1, \dots, e_n) une famille génératrice de \mathbb{K}^n . Montrer que (e_2, \dots, e_n) est libre.

Exercice 3. ✓

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit

$$u_k = (k, k-1, \dots, 2, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n.$$

Montrer que (u_1, u_2, \dots, u_n) est une base de \mathbb{K}^n .

Espaces de suites, de matrices et de polynômes

Exercice 4. ✓

Soit $n \geq 1$. Rappeler la dimension de $M_n(\mathbb{K})$. Déterminer les dimensions :

- (i) de l'espace $D_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales ;
- (ii) de l'espace $T_n^+(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures ;
- (iii) de l'espace $T_n^-(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires inférieures ;
- (iv) de l'espace $S_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques ;
- (v) de l'espace $A_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques ;
- (vi) de l'espace $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) = \ker \text{tr}$.

Exercice 5⁺. 💡
 Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite *magique* s'il existe un nombre réel m tel que la somme des coefficients de M présents sur chaque ligne et sur chaque colonne vaut m .

Montrer que l'ensemble \mathcal{M} des matrices magiques est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$, et déterminer sa dimension.

Exercice 6⁺. _____

1. On considère un polynôme $P = X^2 + \alpha X + \beta$ admettant deux racines $\rho \neq \sigma \in \mathbb{K}$ et on pose

$$\mathcal{R} = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + \alpha u_{n+1} + \beta u_n = 0\}.$$

Montrer que \mathcal{R} est un plan vectoriel, puis en déduire que $((\rho^n)_{n \in \mathbb{N}}, (\sigma^n)_{n \in \mathbb{N}})$ est une base de \mathcal{R} .

2. Soit $X^k + \alpha_{k-1}X^{k-1} + \dots + \alpha_1X + \alpha_0 \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme possédant k racines distinctes ρ_1, \dots, ρ_n .
 En généralisant le raisonnement de la question précédente, montrer que

$$\mathcal{R}' = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+k} + \alpha_{k-1}u_{n+k-1} + \dots + \alpha_1u_{n+1} + \alpha_0u_n = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de dimension k et en exhiber une base.

Sous-espaces vectoriels

Autocorrection C. ✔

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P} = \{P \in K_{2n}[X] \mid P(-X) = P(X)\}$ et $\mathcal{J} = \{P \in K_{2n}[X] \mid P(-X) = -P(X)\}$.

1. Montrer que \mathcal{P} et \mathcal{J} sont des sous-espaces vectoriels de $K_{2n}[X]$.
2. Montrer que \mathcal{P} et \mathcal{J} sont en somme directe.
3. En exhibant des familles libres explicites, montrer que $\dim \mathcal{P} \geq n + 1$ et $\dim \mathcal{J} \geq n$.
4. En faisant le moins de calculs possibles, montrer que les inégalités de la question précédente sont des égalités, et en déduire une base de \mathcal{P} , une base de \mathcal{J} , et une démonstration du fait que $K_{2n}[X] = \mathcal{P} \oplus \mathcal{J}$.

Exercice 7. _____

Soit E un espace vectoriel et $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in E$.

On suppose la famille $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ libre. En déduire que $\text{rg}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \geq n$.

Exercice 8. ✔

1. Soit E un sous-espace vectoriel de K^n . Montrer qu'il existe une sous-famille $(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$ de la base canonique telle que E et $\text{Vect}(e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$ soient supplémentaires.
2. Déterminer un supplémentaire de $\{(x, y, z, t) \in K^4 \mid x - y - z + t = 0 \text{ et } y - 2z + t = 0\}$.

Exercice 9. _____

Soit V_1 et V_2 deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E .

On suppose $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + 1$. Montrer que $V_1 \subseteq V_2$ ou $V_2 \subseteq V_1$.

Exercice 10.

1. Soit A, B et C trois parties finies d'un ensemble Ω . Montrer que

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

2. Soit F, G et H trois sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E . A-t-on

$$\dim(F + G + H) = \dim(F) + \dim(G) + \dim(H) - \dim(F \cap G) - \dim(F \cap H) - \dim(G \cap H) + \dim(F \cap G \cap H) ?$$

Exercice 11.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G > \dim E$, alors F et G ne peuvent pas être en somme directe.
2. Soit F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E . Donner une condition sur $\dim F + \dim G + \dim H$ garantissant que l'intersection $F \cap G \cap H$ soit non triviale.

Exercice 12⁺.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $p, q \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Quelles sont les dimensions possibles pour une intersection $F \cap G$, quand F (resp. G) est un sous-espace vectoriel de E de dimension p (resp. q) ?

Exercice 13⁺.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(F_i)_{i=1}^{n+1}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E .

Montrer qu'il existe $J \subsetneq \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ tel que $\sum_{j \in J} F_j = \sum_{i=1}^{n+1} F_i$.

Exercice 14.

Soit E un espace vectoriel de dimension n .

1. Soit H et H' deux hyperplans de E . Montrer que $\dim(H \cap H') \in \{n-1, n-2\}$, et déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\dim(H \cap H') = n-2$.
2. Quelle est la dimension de

$$\left\{ (a, b, c, d, e, f, g, h, i) \in \mathbb{R}^9 \left| \begin{array}{l} a - 7b + 3c - 2d + f - g + \sqrt{2}h + 42i = 0 \\ a + 2b + 3c + 4d + 5e + 6f + 7g + 8h + 9i = 0 \end{array} \right. \right\} ?$$

3. Soit H_1, \dots, H_r des hyperplans de E . Montrer que

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^r H_i \right) \geq n - r.$$

4. Soit $v = (2, 1, -1, 0) \in \mathbb{R}^4$ et $D = \text{Vect}(v)$. Écrire D comme l'intersection de trois hyperplans.

Exercice 15.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $F, G \subseteq E$ deux espaces en somme directe.

Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel $\widehat{F} \supseteq F$ de E tel que $\widehat{F} \oplus G = E$.

Exercice 16.

Montrer que deux supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel sont isomorphes.

Exercice 17⁺ (Lemme de l'échange de Steinitz).

Soit E un espace vectoriel et (f_1, \dots, f_m) une famille génératrice de E et (e_1, \dots, e_n) une famille libre de E . Pour $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit l'assertion $P(r)$:

« il existe des indices i_1, \dots, i_r tous distincts telle que la famille obtenue à partir de (f_1, \dots, f_m) en remplaçant chacun des f_{i_k} par e_k est génératrice. »

1. Montrer par récurrence l'assertion $\forall r \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(r)$.
2. Constater que ce résultat redémontre le lemme d'échange de Steinitz, et explique mieux son nom.

Exercice 18 (Commutant de matrices 2×2).

Dans cet exercice, on fixe une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$ et on étudie son *commutant*, c'est-à-dire

$$\mathcal{C}(A) = \{M \in M_2(K) \mid AM = MA\}.$$

Plus précisément, on va montrer

$$\mathcal{C}(A) = \begin{cases} M_2(K) & \text{si } A \in \text{Vect}(I_2) \\ \text{Vect}(I_2, A) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\heartsuit)$$

Généralités.

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(K)$.
2. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est stable par produit : $\forall M, N \in \mathcal{C}(A), MN \in \mathcal{C}(A)$.
3. Déterminer $\mathcal{C}(A)$ quand A est une matrice scalaire.
4. En exhibant une famille libre explicite, montrer que $\dim \mathcal{C}(A) \geq 2$.

Un cas particulier. Dans cette partie, on suppose $a \neq d$.

5. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ et $\text{Vect}(E_{1,2}, E_{2,1})$ sont en somme directe.
6. En déduire que $\dim \mathcal{C}(A) = 2$ et $\mathcal{C}(A) = \text{Vect}(I_2, A)$.

Fin de l'étude.

7. Soit $P \in GL_2(K)$. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{C}(P^{-1}AP)$ sont isomorphes.
8. On suppose $A \notin T_2^+(K)$. À l'aide de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que $\mathcal{C}(A) = \text{Vect}(I_2, A)$.
9. Conclure la démonstration du résultat (\heartsuit).

Applications linéaires (et théorème du rang)

Autocorrection D.



Soit

$$f : \begin{cases} K^4 & \rightarrow & K^2 \\ (x, y, z, t) & \mapsto & (x - z, y - t) \end{cases}$$

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(K^4, K^2)$.
2. Donner une base et la dimension de $\ker f$.
3. En déduire que f est surjective.
4. Soit $G = \{(x, y, z, t) \in K^4 \mid y = z = 0\}$.
Montrer que G est un sous-espace vectoriel de K^4 , dont on précisera la dimension.
5. Montrer que $\ker f$ et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de K^4 .

Exercice 19. ✓

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = \text{id}_E$.

1. Montrer $\text{im}(f - \text{id}_E) \subseteq \ker(f^2 + f + \text{id}_E)$;
2. Montrer que $\text{im}(f - \text{id}_E)$ et $\ker(f - \text{id}_E)$ sont supplémentaires.

Exercice 20. ✓

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $E = \ker u \oplus \text{im } u$ si et seulement si $\text{im } u^2 = \text{im } u$ et $\ker u^2 = \ker u$.
2. On suppose E de dimension finie, montrer que

$$E = \ker u \oplus \text{im } u \Leftrightarrow \text{im } u^2 = \text{im } u \Leftrightarrow \ker u^2 = \ker u.$$

3. L'équivalence $\text{im } u^2 = \text{im } u \Leftrightarrow \ker u^2 = \ker u$ est-elle valable en dimension infinie ?

Exercice 21. ✓

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose que $\ker u + \ker v = \text{im } u + \text{im } v = E$. Montrer que les deux sommes sont directes.
2. Montrer par un contre-exemple que la question précédente cesse d'être vraie si l'on ne suppose plus E de dimension finie.

Exercice 22. 💡

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in K[X]$ tel que $P_n - P'_n = X^n$.

Exercice 23. 💡 ✓

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Soit $V \subseteq E$ un sous-espace vectoriel. Montrer que

$$\dim u[V] = \dim V - \dim (V \cap \ker u).$$

2. Soit $W \subseteq F$ un sous-espace vectoriel. Montrer que

$$\dim u^{-1}[W] = \dim (W \cap \text{im } u) + \dim \ker u.$$

Exercice 24. ✓

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E .
Montrer qu'il existe un espace vectoriel E' et $\varphi \in \mathcal{L}(E', E)$ tel que $F = \text{im } \varphi$.
2. Soit G un sous-espace vectoriel de E .
Montrer qu'il existe un espace vectoriel E'' et $\psi \in \mathcal{L}(E, E'')$ tel que $G = \ker \psi$.
3. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
À quelle condition existe-t-il $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $F = \text{im } u$ et $G = \ker u$?

Exercice 25. ✓

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ non nul. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $u^2 = 0$;
- (ii) il existe un projecteur p de E tel que $pu = u$ et $up = 0$;
- (iii) il existe un projecteur p de E tel que $pu - up = u$.

Exercice 26⁺ (Lemme de factorisation). 🔒

Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(E, G)$.

Le but de l'exercice est de démontrer que

$$\ker u \subseteq \ker v \Leftrightarrow (\exists w \in \mathcal{L}(F, G) : v = w \circ u).$$

1. On suppose qu'il existe $w \in \mathcal{L}(F, G)$ telle que $v = w \circ u$. Montrer que $\ker u \subseteq \ker v$.
2. En considérant un supplémentaire S de $\ker u$ dans E et un supplémentaire T de $\operatorname{im} u$ dans F , construire une application linéaire $w \in \mathcal{L}(F, G)$ telle que $v = w \circ u$.

Exercice 27⁺.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$. Soit $f \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ tel que

$$\forall x \in V, f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_n(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$$

Montrer que f est combinaison linéaire des f_1, \dots, f_n .

Exercice 28⁺. X

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\operatorname{im} f = \ker f \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } \exists h \in \mathcal{L}(E) : hf + fh = \operatorname{id}).$$

Exercice 29. 🔒

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall v \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u$.

Montrer que u est une homothétie.

Exercice 30⁺⁺.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

On dit que deux r -uplets (F_1, \dots, F_r) et (F'_1, \dots, F'_r) de sous-espaces vectoriels de E sont *équivalents* s'il existe un automorphisme $\varphi \in \operatorname{GL}(E)$ tel que $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \varphi[F_i] = F'_i$.

1. Classer les sous-espaces vectoriels de E à équivalence près.
2. Classer les couples de sous-espaces vectoriels de E à équivalence près.
3. On suppose pour simplifier que E est de dimension paire, et on note $r = \frac{1}{2} \dim E$.
Montrer que les triplets de sous-espaces vectoriels (F_1, F_2, F_3) tels que $\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \dim F_i = r$ et $\forall i \neq j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, F_i \cap F_j = \{0_E\}$ sont tous équivalents entre eux.
4. On suppose toujours $\dim E = 2r$. Montrer qu'il existe une infinité de quadruplets de sous-espaces vectoriels (F_1, F_2, F_3, F_4) tels que $\forall i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, \dim F_i = r$ et $\forall i \neq j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, F_i \cap F_j = \{0_E\}$ deux à deux non équivalents.

Inégalités sur le rang et la dimension

Exercice 31.

Soit (u_1, \dots, u_n) une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E . Soit $p \leq q$ deux éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Montrer $0 \leq \operatorname{rg}(u_1, \dots, u_q) - \operatorname{rg}(u_1, \dots, u_p) \leq q - p$.

Exercice 32.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $a, b \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\dim \ker(a \circ b) \leq \dim \ker a + \dim \ker b.$$

Exercice 33⁺.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $r, s \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer

$$\mathcal{R}(r, s) = \left\{ \operatorname{rg}(g \circ f) \mid (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, \operatorname{rg} f = r \text{ et } \operatorname{rg} g = s \right\}.$$

Exercice 34⁺.

1. **Deux résultats sur les intersections d'hyperplans.** Soit E un espace vectoriel de dimension n .

(a) On se donne c hyperplans H_1, \dots, H_c de E . Montrer que $\dim \left(\bigcap_{i=1}^c H_i \right) \geq n - c$.

(b) Donner un exemple où l'inégalité ci-dessus est stricte.

(c) Réciproquement, soit $c \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - c$.

Exprimer F comme l'intersection d'exactly c hyperplans de E .

2. **Une application : décroissance de la codimension par image réciproque.** Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, et V un sous-espace vectoriel de F .

En exprimant V comme une intersection d'hyperplans, montrer l'inégalité

$$\dim E - \dim u^{-1}[V] \leq \dim F - \dim V.$$

3. En utilisant notamment le théorème du rang et la formule de Grassmann, donner une deuxième démonstration de l'inégalité précédente, sans utiliser d'hyperplans.

Mélange

Exercice 35.

Soit E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie. Soit $a \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in \mathcal{L}(E, G)$.

Montrer que si $\operatorname{rg} a + \operatorname{rg} b < \dim E$, il existe $x \in E$ non nul tel que $a(x) = 0$ et $b(x) = 0$.

Exercice 36.

Soit $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer sans calcul qu'on peut trouver un triplet non nul de réels (λ, μ, ν) tel que la matrice $\lambda A + \mu B + \nu C$ soit triangulaire supérieure et de trace nulle.

Exercice 37.

Soit E un espace vectoriel et F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels de E .

Montrer que les $F_i, i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ sont en somme directe si et seulement si $\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) = \sum_{i=1}^p \dim F_i$.

Exercice 38⁺.

Soit (f_1, \dots, f_n) une famille libre de fonctions dérivables $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer $\operatorname{rg}(f'_1, \dots, f'_n) \geq n - 1$.

Exercice 39.

Montrer que $\varphi : \begin{cases} K[X] \times K & \rightarrow K[X] \\ (P, \kappa) & \mapsto XP + \kappa \end{cases}$ est un isomorphisme, et en déduire une nouvelle preuve du fait que $K[X]$ n'est pas de dimension finie.