
Représentation matricielle

Exercice 8.

Dans la première question, pour le sens direct, il s'agit de construire un endomorphisme f possédant la propriété $\ker f = \operatorname{im} f$.

Une bonne première étape est de construire une matrice $A \in M_2(\mathbb{K})$ telle que $\ker A = \operatorname{im} A$, afin de s'en servir de « brique de base » dans la construction de f .

Exercice 13.

On pourra commencer par s'intéresser à l'effet sur la matrice d'un endomorphisme d'un changement de bases d'un type très particulier : celui où l'on se contente de dilater (avec des facteurs différents) les vecteurs de base.

Exercice 30.

Opérations sur les lignes !

Exercice 35.

La réponse est presque toujours $\operatorname{Vect}(\mathcal{R}_r) = M_n(\mathbb{K})$.

Exercice 37.

Pour la deuxième question, on pourra montrer qu'étant donné une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ non inversible, il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que $P^{-1}AQ$ soit une matrice de trace nulle (et même de diagonale nulle).

Exercice 38.

Pour la deuxième question, on pourra écrire A sous la forme PJ_rQ , avec $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$.

Exercice 39.

Le cours ne répond pas directement à la question, mais il permet de voir qu'une application linéaire donnée ne peut pas se factoriser à travers un espace vectoriel « trop petit ».

Autocorrection

Autocorrection A.

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad \text{On vérifie par récurrence que } \forall n \geq 1, A^n = \begin{pmatrix} 1 & -(n-1) & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3. \quad \text{On en déduit que pour } n \geq 1, f^n : (x, y, z) \mapsto (x - (n-1)y - z, y, y).$$

Autocorrection B.

1. La matrice A est triangulaire supérieure, avec des coefficients diagonaux non nuls, donc elle est inversible.

On peut l'inverser par la méthode des bimatrices :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\underset{\mathbb{L}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \quad [L_2 \leftarrow L_1 - L_2] \\ &\underset{\mathbb{L}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), & \quad \begin{array}{l} [L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3] \\ [L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3] \end{array} \end{aligned}$$

$$\text{donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On vérifie que

$$\text{Mat}_{(1,X,X^2)}(\Delta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que Δ est un automorphisme, et que son inverse vérifie

$$\text{Mat}_{(1,X,X^2)}(\Delta^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, l'équation $\Delta(P) = 1 + X + 2X^2$ a une unique solution (car Δ est bijective), à savoir le polynôme $\Delta^{-1}(1 + X + 2X^2)$, dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{(1,X,X^2)}\left(\Delta^{-1}(1 + X + 2X^2)\right) &= \text{Mat}_{(1,X,X^2)}\left(\Delta^{-1}\right) \text{Mat}_{(1,X,X^2)}\left(1 + X + 2X^2\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc

$$\Delta^{-1}(1 + X + 2X^2) = 4 - 3X + 2X^2.$$

Autocorrection C.

1. Notons $\mathcal{B}_c^{(4)}$ et $\mathcal{B}_c^{(3)}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^{(4)}$ et $\mathbb{R}^{(3)}$. On a alors

$$M =_{\mathcal{B}_c^{(4)}[\mathcal{C}]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N =_{\mathcal{B}_c^{(3)}[\mathcal{D}]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On sait alors que $\text{rg}(\mathcal{C}) = \text{rg}(M)$, donc il suffit de montrer que cette matrice est de rang 4 (c'est-à-dire inversible) pour en conclure que \mathcal{C} est une base, et de même pour N et \mathcal{D} . On peut faire cela sans difficulté.

2. Pour déterminer la matrice $X' = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \\ \xi \end{pmatrix}$ de u dans la base \mathcal{B} , on peut résoudre le système

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \nu + \xi = 1 \\ \nu = -2 \\ \mu + \nu = 5 \\ \mu + \nu + \xi = 6. \end{cases}$$

ou calculer le produit

$$X' = \left(P_{\mathcal{B}_c^{(4)} \rightarrow \mathcal{C}} \right)^{-1} {}_{\mathcal{B}_c^{(4)}}[u] = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

en inversant la matrice $P_{\mathcal{B}_c^{(4)} \rightarrow \mathcal{C}} = M$.

On trouve $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pour vérifier les calculs, on a $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. (a) On a ${}_{\mathcal{B}_c^{(3)}}[f]_{\mathcal{B}_c^{(4)}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

(b) On a

$${}_{\mathcal{D}}[f]_e = P_{\mathcal{B}_c^{(3)} \rightarrow \mathcal{D}}^{-1} {}_{\mathcal{B}_c^{(3)}}[f]_{\mathcal{B}_c^{(4)}} P_{\mathcal{B}_c^{(4)} \rightarrow \mathcal{C}}.$$

On calcule l'inverse $P_{\mathcal{B}_c^{(3)} \rightarrow \mathcal{D}}^{-1} = N^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On en déduit

$${}_{\mathcal{D}}[f]_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 8 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Autocorrection D.

1. On va montrer que la famille \mathcal{B}' est libre. Soit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda e'_1 + \mu e'_2 + \nu e'_3 = 0_E$.

En remplaçant les trois vecteurs par leur expression et en rassemblant les termes, on obtient

$$\lambda(e_2 + e_3) + \mu(e_1 - e_2 + e_3) + \nu(e_1 - e_2) = 0 \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \mu + \nu = 0 \\ \lambda - \mu - \nu = 0 \\ \lambda + \mu = 0 \end{cases} \quad (\mathcal{S})$$

par liberté de \mathcal{B} .

Après résolution, on obtient que la seule solution de ce système est $\lambda = \mu = \nu = 0$, ce qui montre que \mathcal{B}' est libre.

Comme elle a $3 = \dim E$ vecteurs, on en déduit que \mathcal{B}' est une base de E .

Remarque. On peut raisonner très légèrement différemment : le cours garantit que

$$\mathcal{B}' \text{ est une base} \Leftrightarrow \text{rg } \mathcal{B}' = 3 \Leftrightarrow \text{rg } ({}_{\mathcal{B}}[\mathcal{B}']) = 3.$$

On peut alors calculer le rang de $M = {}_{\mathcal{B}}[B'] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ en échelonnant cette matrice.

On obtient alors que la forme échelonnée réduite de cette matrice est I_3 , donc le rang de cette matrice est 3, ce qui conclut.

Même si on ne prononce pas les mêmes mots, on fait en fait le même calcul, puisque la matrice M est la matrice du système (S).

2. Calculons :

$$\begin{aligned} f(e'_1) &= f(e_2 + e_3) \\ &= (-e_1 + 2e_2 + 2e_3) + (e_1 - e_2 - e_3) \\ &= e_2 + e_3 \\ &= e'_1 \\ f(e'_2) &= f(e_1 - e_2 + e_3) \\ &= (-3e_1 + 4e_2 + e_3) - (-e_1 + 2e_2 + 2e_3) + (e_1 - e_2 - e_3) \\ &= -e_1 + e_2 - e_3 \\ &= -e'_2 \\ f(e'_3) &= f(e_1 - e_2) \\ &= (-3e_1 + 4e_2 + 2e_3) - (-e_1 + 2e_2 + 2e_3) \\ &= -2e_1 + 2e_3 \\ &= -2e'_3. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \text{diag}(1, -1, -2).$$

3. On a

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule P^{-1} par la méthode des bimatrices :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\underset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) & [L_1 \leftrightarrow L_3] \\ &\underset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) & [L_2 \leftarrow L_2 - L_1] \\ &\underset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) & [L_2 \leftrightarrow L_3] \\ &\underset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} [L_1 \leftarrow L_1 - L_2] \\ [L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2] \end{array} \\ &\underset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right) & \begin{array}{l} [L_1 \leftarrow L_1 + L_3] \\ [L_2 \leftarrow L_2 - L_3] \end{array} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. C'est une question de cours : on a

$$\begin{aligned} A &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \\ &= P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}^{-1} \\ &= PDP^{-1}. \end{aligned}$$

5. Puisque le produit de deux matrices diagonales s'effectue « coefficient par coefficient », on obtient par une récurrence immédiate

$$\forall n \in \mathbb{N}, D^n = \text{diag}(1, (-1)^n, (-2)^n).$$

Par ailleurs, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} A^n &= (PDP^{-1})^n \\ &= PDP^{-1} PDP^{-1} PDP^{-1} \dots PDP^{-1} \\ &= PDI_n DI_n \dots I_n DP^{-1} \\ &= PD^n P^{-1}, \end{aligned}$$

ce qu'une récurrence facile montrerait également.

In fine, on obtient

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (-1)^n & (-2)^n \\ 1 & -(-1)^n & -(-2)^n \\ 1 & (-1)^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(-1)^n + 2(-2)^n & -(-1)^n + (-2)^n & (-1)^n - (-2)^n \\ 1 + (-1)^n - 2(-2)^n & 1 + (-1)^n - (-2)^n & -(-1)^n + (-2)^n \\ 1 - (-1)^n & 1 - (-1)^n & (-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Autocorrection E.

(i) Les deux vecteurs sont non colinéaires, donc la famille est libre.

D'après le théorème de la base intermédiaire, on peut compléter cette famille en « piochant » des vecteurs dans n'importe quelle famille génératrice, par exemple la base canonique.

Dans notre exemple, on vérifie par exemple directement que la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de \mathbb{R}^4 .

On peut par exemple effectuer des opérations sur les colonnes pour montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 10 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 4, ce qui montre que la famille est une base.

- (ii) Les deux vecteurs sont clairement colinéaires, donc la famille n'est pas libre. Par ailleurs, puisqu'elle n'a que deux éléments alors que \mathbb{R}^3 est de dimension 3, elle ne peut pas être génératrice.
- (iii) La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -12 & 0 \\ 7 & 35 & 2 \end{pmatrix}$$

est échelonnée et a trois pivots, donc elle est de rang 3. Cela montre que la famille est de rang 3, donc c'est une base de \mathbb{R}^3 .

- (iv) La famille n'est jamais génératrice, puisqu'il s'agit d'une famille de 3 éléments de \mathbb{R}^4 , qui est un espace vectoriel de dimension 4.

Par ailleurs, on montre que

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & a \end{pmatrix} \underset{\sim}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui est une matrice échelonnée de rang

$$\begin{cases} 2 & \text{si } a = 1 \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, si $a = 1$, la famille n'est ni libre ni génératrice.

En revanche, si $a \neq 1$, la famille est libre, mais pas génératrice.

On montre par le calcul que si $a \neq 1$, alors la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de \mathbb{R}^4 .

Autocorrection F.

1. Soit $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\text{Cela donne } \begin{pmatrix} \lambda - \mu \\ \lambda + \mu + \nu \\ \mu + \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Après résolution du système linéaire, on obtient $\lambda = \mu = \nu = 0$, ce qui montre que \mathcal{B} est libre. Comme elle a $3 = \dim \mathbb{R}^3$ éléments, la famille \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^3 .

2. On peut utiliser la formule de changement de bases ou revenir à la définition de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$:

- $f(e_1) = 2e_1$;
- $f(e_2) = e_2$;
- $f(e_3) = 0$,

donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{diag}(2, 1, 0).$$

3. La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est échelonnée, donc on peut lire directement son rang comme nombre de pivots :

$$\text{rg } f = \text{rg } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = 2.$$

Puisque $f(e_1) = 2e_1$ et $f(e_2) = e_2$, les deux vecteurs e_1 et e_2 appartiennent à $\text{im } f$. On a donc, par stabilité par combinaisons linéaires,

$$\text{Vect}(e_1, e_2) \subseteq \text{im } f.$$

Comme $\dim \text{im } f = \text{rg } f = 2$ et que $\dim \text{Vect}(e_1, e_2) = 2$ (la famille (e_1, e_2) étant libre, en tant que sous-famille d'une base), on en déduit que $\text{Vect}(e_1, e_2) = \text{im } f$ par inclusion et égalité des dimensions.

De même, l'expression $f(e_3) = 0$ entraîne $\text{Vect}(e_3) \subseteq \ker f$, et $\text{Vect}(e_3)$ est de dimension 1. D'après le théorème du rang, $\dim \ker f = \dim \mathbb{R}^3 - \text{rg } f = 1$, donc on conclut que $\ker f = \text{Vect}(e_3)$ par inclusion et égalité des dimensions.

Ainsi, (e_1, e_2) est une base de $\text{im } f$ et (e_3) est une base de $\ker f$.