Intégration

Calcul intégral

Autocorrection A. ☑

Déterminer, sans aucun calcul d'intégrale, les primitives des fonctions suivantes.

(i) $x \mapsto xe^{-2x^2}$;

(ii) $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$;

(iii) $x \mapsto \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$;

(iv) $x \mapsto \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$;

(v) $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$;

(vi) $x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$;

(vii) $x \mapsto \cos x \sin^5 x$;

(viii) $x \mapsto \sin^5 x$;

(ix) $x \mapsto \tan^2(x)$;

(x) $x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^4}$;

(xi) $x \mapsto \dfrac{1}{\tan x}$;

(xii) $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^3}$;

(xiii) $x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{1+\cos^2(x)}$;

(xiv) $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\tan x}}$;

(xv) $x \mapsto \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$;

(xvi) $x \mapsto \dfrac{\ln(\ln x)}{x}$;

(xvii) $x \mapsto e^{e^x+x}$;

(xviii) $x \mapsto \dfrac{1}{x+x(\ln x)^2}$;

(xix) $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$;

(xx) $x \mapsto e^{-x}\sin(2x)$;

(xxi) $x \mapsto \operatorname{sh} x \sin x$.

Autocorrection B. ☑

Déterminer les primitives des fonctions rationnelles suivantes (on se place dans un intervalle que l'on ne précise pas sur lequel la fonction est définie) :

(i) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-7x+10}$;

(ii) $x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2-7x+10}$;

(iii) $x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{x^2-7x+10}$;

(iv) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-x+1}$;

(v) $x \mapsto \dfrac{4+x}{x^2+1}$;

(vi) $x \mapsto \dfrac{1}{2x^2+x+1}$;

(vii) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-6x+9}$;

(viii) $x \mapsto \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^2$;

(ix) $x \mapsto \dfrac{1}{(x^2-1)(x-2)^2}$;

(x) $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^4}$;

(xi) $x \mapsto \dfrac{x^5}{1-x^4}$;

(xii) $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^4}$;

(xiii) $x \mapsto \dfrac{1}{x^3-1}$.

Exercice 1.

Calculer les (limites d')intégrales suivantes :

(i) $\displaystyle\int_2^3 \frac{t+1}{t(t-1)^3}\,dt$;

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{1+t^6}$;

(iii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^4\,dt}{t^2+2t+5}$;

(iv) $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{t\,dt}{(t+1)^2(2t+1)}$;

(v) $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{dt}{(t^2+4)(t+2)^2}$;

(vi) $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{t\,dt}{t^3+1}$.

Exercice 2.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

(i) $t \mapsto \dfrac{1}{1+it}$;

(ii) $t \mapsto \dfrac{1}{t-j}$, où $j = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Exercice 3.

1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi} x\,\cos^2 x\,dx$.
2. En déduire habilement $J = \displaystyle\int_0^{\pi} x\,\sin^2 x\,dx$.

Exercice 4.

Calculer la *valeur moyenne* $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(t)\,\cos(2t)\,\cos(3t)\,dt$.

Intégration par parties

Autocorrection C.

En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes.

(i) $\displaystyle\int_0^1 t^2 e^t\,dt$;

(ii) $\displaystyle\int_1^e t^2 \ln t\,dt$;

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin(3t)\,dt$;

(iv) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,dt$;

(v) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt$;

(vi) $\displaystyle\int_0^1 t^3\,e^{t^2}\,dt$;

(vii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{(x+1)^2}\,dx$;

(viii) $\displaystyle\int_0^1 \arcsin(x)^2\,dx$;

(ix) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x^2\,\arctan(x)\,dx$.

Exercice 5.

Déterminer les primitives de $x \mapsto e^{2x}\sin(3x)$ et $x \mapsto \operatorname{ch} x \cos x$

- à l'aide de l'exponentielle complexe ;
- à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 6.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

(i) $x \mapsto \arctan x$.

(ii) $x \mapsto (x\ln x)^2$.

(iii) $x \mapsto x^2 e^x$.

(iv) $x \mapsto \dfrac{x}{\cos^2(x)}$.

(v) $x \mapsto \ln(1+x^2)$.

(vi) $x \mapsto \arcsin x$.

(vii) $x \mapsto x\operatorname{ch} x$.

(viii) $x \mapsto x\sin^2(x)$.

(ix) $x \mapsto x\arctan x$.

Exercice 7.

Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt$.

1. Montrer $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*, \quad I_{p,q} = \dfrac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$.
2. En déduire $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, \quad I_{p,q} = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$.
3. Montrer $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

Changement de variables

Autocorrection D. ☑

À l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes.

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,dt$;

(ii) $\displaystyle\int_0^1 xe^{\sqrt{x}}\,dx$;

(iii) $\displaystyle\int_2^3 \frac{t}{(t^2-1)^2}\,dt$;

(iv) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$;

(v) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$;

(vi) $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t)\,dt$;

(vii) $\displaystyle\int_{1/3}^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$;

(viii) $\displaystyle\int_1^2 (\ln x)^2\,dx$;

(ix) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1}\,dx$;

(x) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$;

(xi) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$;

(xii) $\displaystyle\int_{1/4}^1 \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}\,dx$;

(xiii) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,dt$;

(xiv) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)-\ln(t)}{t^2}\,dt$.

Exercice 8.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes à l'aide d'un changement de variable.

(i) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}$;

(ii) $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$;

(iii) $x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$;

(iv) $x \mapsto \sin(\ln(x))$;

(v) $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$;

(vi) $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$;

(vii) $x \mapsto \dfrac{\ln t}{t+t(\ln t)^2}$;

(viii) $x \mapsto \dfrac{1}{1+\tan x}$.

Exercice 9.

1. Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Déterminer une primitive de $x \mapsto x^\alpha \ln x$ au moyen d'un changement de variable du type $x = t^\beta$ avec $\beta \in \mathbb{R}$ à préciser.

Exercice 10 (Règles de Bioche). ☑

1. Trouver une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x + \tan x}$, d'abord à l'aide du changement de variables $t = \tan(x/2)$, puis à l'aide du changement de variables $u = \cos(x)$.
2. Quand on souhaite calculer la primitive d'une fonction $x \mapsto f(x)$ à l'aide d'un changement de variables trigonométrique, les *règles de Bioche* recommandent de faire, si possible, le changement de variables « possédant la même symétrie que $f(x)\,dx$ » (le dx est important !), c'est-à-dire
   - $u = \cos x$ si $f(-x) = -f(x)$ (c'est-à-dire si $f(-x)d(-x) = f(x)dx$) ;
   - $u = \sin x$ si $f(\pi - x) = -f(x)$ (c'est-à-dire si $f(\pi-x)d(\pi-x) = f(x)dx$) ;
   - $u = \tan x$ si $f(\pi+x) = f(x)$ (c'est-à-dire si $f(\pi+x)d(\pi+x) = f(x)\,dx$).

   Si les trois règles s'appliquent, on pose $u = \cos(2x)$; si aucune ne s'applique, $t = \tan(x/2)$.

   Utiliser ces règles pour calculer les intégrales suivantes :

   (i) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}$;

   (ii) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{4-\cos^2 x}\,dx$;

   (iii) $\displaystyle\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^3 x}$;

   (iv) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos(x)}$.

Exercice 11$^+$. ☑

1. Montrer : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t}\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t}\,dt = \frac{\pi}{4}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}+t}$.

Exercice 12.

Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$ pour tout $x \geqslant 1$ en posant $u = 1/t$.

Autres calculs

Exercice 13.

Donner un sens à l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2}$ et la calculer.

Exercice 14$^+$. ☑

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in [a, b], f(a+b-x) = f(x)$.
   Calculer $\displaystyle\int_a^b t\,f(t)\,dt$ en fonction de $\displaystyle\int_a^b f$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t}{1+\sin t}\,dt$.

Exercice 15.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(t^2+1)^{n+1}}$.

1. Obtenir, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une expression de $I_{n+1}(x)$ en fonction de $I_n(x)$.
2. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $\lim\limits_{x \to +\infty} I_n(x)$, et la calculer.

Propriétés de l'intégrale

Exercice 16.

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ tels que $a < b < c$ et $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, c]$. Montrer

$$\frac{1}{c-a}\int_a^c f \leqslant \max\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f, \frac{1}{c-b}\int_b^c f\right).$$

Exercice 17. ☑

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ périodique. À quelle condition f possède-t-elle une primitive périodique ?

Exercice 18.

Déterminer les fonctions f continues sur $[a, b]$ telles que $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt$.

Exercice 19.

Soit $f \in C^0([0,1])$ positive telle que $\displaystyle\int_0^1 f \leqslant \frac{1}{2}$. Montrer que f a un point fixe.

Exercice 20.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, quels que soient $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$, on a $\displaystyle\int_\alpha^\beta f = 0$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 21.

Déterminer les fonctions continues $f : [0,1] \to [0,1]$ telles que $\displaystyle\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$.

Exercice 22$^+$.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4$.

Montrer que $f = 0$ ou $f = 1$.

Exercice 23^{++}.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f = 0$, et $\alpha = \min_{[0,1]} f$ et $\beta = \max_{[0,1]} f$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2 \leqslant -\alpha\beta$.

« Théorème fondamental »

Autocorrection E.

Soit $f \in C^0([a,b])$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\displaystyle f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$.

Autocorrection F.

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. Déterminer la limite de $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x f$ quand $x \to 0$.

Exercice 24.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $T > 0$. On suppose que la fonction $\displaystyle x \mapsto \int_x^{x+T} f$ est constante.

Montrer que f est T-périodique.

Exercice 25.

1. Si $f \in C^0(\mathbb{R})$, on note $F : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt. \end{cases}$

   Montrer que l'application envoyant f sur F est un endomorphisme P_0 de $C^0(\mathbb{R})$. Déterminer son noyau et son image.
2. Mêmes questions pour l'application P_a envoyant $f \in C^0(\mathbb{R})$ sur sa primitive s'annulant en $a \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $f \in C^0(\mathbb{R})$ a une unique primitive G telle que $\displaystyle\int_0^1 G = 0$. Montrer que l'application envoyant f sur G est un endomorphisme Π de $C^0(\mathbb{R})$.

Exercice 26.

1. Soit $f \in C^0([-1,1])$. Déterminer la limite de $\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x t\,f(t)\,dt$ quand $x \to 0$.
2. Que devient le résultat précédent si l'on suppose simplement f continue par morceaux ?

Exercice 27.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Justifier que les fonctions suivantes sont de classe C^1 et exprimer leurs derivées.

- $G_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \displaystyle\int_{2x}^{x^2} f(t)\,dt \end{cases}$;
- $G_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \displaystyle\int_0^x x\,f(t)\,dt \end{cases}$;
- $G_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \displaystyle\int_0^x f(t+x)\,dt \end{cases}$;
- $G_4 : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \displaystyle\int_\pi^{2\pi} \frac{\cos(tx)}{t}\,dt. \end{cases}$

Exercice 28.

Soit $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ t \mapsto & \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto & \displaystyle\int_x^{2x} \varphi. \end{cases}$

1. Montrer que f est bien définie et étudier la parité de f.
2. Justifier que f est dérivable et calculer $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de f.

Exercice 29$^+$.

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_a^b |t-x|\,f(t)\,dt$. Étudier la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}$.

Exercice 30.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que
$$\int_x^y e^{t^2}\,dt = 1.$$
2. On note $\varphi(x)$ le réel obtenu à la question précédente. Montrer que φ est une fonction lisse.

Exercice 31^{++}. *X*

1. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists C > 0, \forall f \in C^1([a,b]), \forall x \in [a,b]$,
$$\left|f(x)^2 - f(a)^2\right| \leqslant C\int_a^b f^2 + \varepsilon\int_a^b f'^2.$$
2. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists D > 0, \forall f \in C^1([a,b])$,
$$\left\|f^2\right\|_\infty \leqslant D\int_a^b f^2 + \varepsilon\int_a^b f'^2.$$

Intégrales et inégalités

Autocorrection G.

Montrer $\dfrac{\ln 2}{\sqrt{3}} \leqslant \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\tan x}{x} \leqslant \sqrt{3}\ln 2$.

Autocorrection H.

Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\int_0^x \lfloor t \rfloor \, dt$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 32$^+$.

1. Calculer $\displaystyle\int_e^\pi \frac{dx}{x}$.
2. En déduire que $\pi^e < e^\pi$.

Exercice 33.

1. Soit $P = X^4(1-X)^4 \in \mathbb{R}[X]$. Trouver un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ et un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que
$$P = (1+X^2)Q + \alpha.$$
2. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx$ et une démonstration de l'inégalité $\dfrac{22}{7} > \pi$.
3. En encadrant la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $[0,1]$, montrer l'encadrement
$$\frac{1979}{630} \leqslant \pi \leqslant \frac{3959}{1260}.$$

Exercice 34.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt \leqslant \frac{2}{n+1}.$$

Exercice 35$^+$.

Montrer les divergences suivantes, sans chercher à calculer exactement les intégrales.
$$\int_x^{2x} \frac{t}{\ln t} \, dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad \int_0^x \sin^2(t) \arctan(t) \, dt \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

Exercice 36$^+$ (Lemme de Gronwall).

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+)$, à valeurs $\geqslant 0$, et telle que $\exists K \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \leqslant K \displaystyle\int_0^x f(t) \, dt$.

Montrer que f est nulle.

Intégration et convexité

Exercice 37 (Inégalité intégrale de Jensen).

Soit $g \in C^0_{pm}([0,1])$ à valeurs dans $[a,b]$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer $f\left(\int_0^1 g\right) \leqslant \int_0^1 f \circ g$.

Exercice 38$^+$ (Inégalité de Hermite-Hadamard et intégration numérique).

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer *l'inégalité de Hermite-Hadamard* :
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$
2. **Application.** Soit $f \in C^2([a,b])$. Montrer
$$\left|\int_a^b f - (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leqslant \|f''\|_\infty \frac{(b-a)^3}{24} \quad \text{et} \quad \left|\int_a^b f - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\right| \leqslant \|f''\|_\infty \frac{(b-a)^3}{12}.$$
3. En déduire que pour $f \in C^2([0,1])$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\left|\int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\right| \leqslant \frac{\|f''\|_\infty}{24n^2} \quad \text{et} \quad \left|\int_0^1 f - \frac{1}{n}\left(\frac{f(0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{f(1)}{2}\right)\right| \leqslant \frac{\|f''\|_\infty}{12n^2}.$$
Ces inégalités constituent un contrôle de l'erreur commise dans deux méthodes de calcul approché appelées respectivement *méthode des rectangles centrées* et *méthode des trapèzes* : convainquez-vous que ces noms sont raisonnables.

Exercice 39$^+$. ☑

Soit $f \in C^1([0,2\pi])$ une fonction convexe. Montrer que
$$\forall n > 0, \qquad a_n = \int_0^{2\pi} f(t)\,\cos(nt)\,dt \geqslant 0.$$

Exercice 40$^+$ (Normes L^p).

Soit $p \geqslant 1$. Pour tout $f \in C^0_{pm}([0,1])$, on définit la « norme L^p » :
$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p}.$$

1. Quelle est la limite de $\|f\|_{L^p}$ quand p tend vers $+\infty$?
2. On suppose $p > 1$, et on définit $q = \dfrac{p}{p-1}$, si bien que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
   (a) Montrer *l'inégalité de Young* : $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$, $a^{1/p} b^{1/q} \leqslant \dfrac{a}{p} + \dfrac{b}{q}$.
   (b) En commençant par le cas $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$, montrer *l'inégalité de Hölder* :
   $$\forall f, g \in C^0_{pm}([0,1]), \int_0^1 f\,g \leqslant \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^q}.$$
   (c) Soit $p_1 \leqslant p_2 \in [1, +\infty[$. Comparer $\|f\|_{L^{p_1}}$ et $\|f\|_{L^{p_2}}$.
3. Soit $f, g \in C^0_{pm}([0,1])$, et $p > 1$.
   (a) Montrer $\|f+g\|_{L^p}^p \leqslant \int_0^1 |f|\,|f+g|^{p-1} + \int_0^1 |g|\,|f+g|^{p-1}$.
   (b) En appliquant habilement l'inégalité de Hölder, montrer *l'inégalité de Minkowski* :
   $$\|f+g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Suites d'intégrales

Exercice 41.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$f_n : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{t^n \sin(nt)}{1+t^3} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt.$$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |I_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
2. En déduire la nature de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 42⁺.

Pour $n \geqslant 0$, on définit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$.

1. Montrer que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. En calculant $I_n + I_{n+1}$, déterminer la limite $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Exercice 43.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$f_n : \begin{cases} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 2n(1-nx) & \text{si } 0 \leqslant x < \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $[0,1]$ et calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.
2. Comparer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$.

Exercice 44⁺.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Déterminer la limite de $\left(\displaystyle\int_0^1 f(x^n)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 45⁺.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,dt$.

1. Démontrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. On suppose de plus que f est C^1 et que $f(1) \neq 0$. Déterminer un équivalent de (u_n).
3. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_0^1 t^n \sin\frac{\pi t}{2}\,dt$ et $\displaystyle\int_0^1 t^n \cos\frac{\pi t}{2}\,dt$

Exercice 46⁺ (Lemme de Riemann-Lebesgue dans le cas C^1).

Soit $f \in C^1([a,b])$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\cos(nt)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Sommes de Riemann

Autocorrection I.

Déterminer les limites des suites suivantes.

$$\text{(i)} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} ; \qquad \text{(ii)} \left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n^2+k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} ; \qquad \text{(iii)} \left(\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} .$$

Exercice 47.

Déterminer les limites des suites suivantes.

$$\text{(i)} \left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ke^{-k/n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} ;$$

$$\text{(ii)} \left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln k^k - \ln n^k\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} ;$$

$$\text{(iii)} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} ;$$

$$\text{(iv)} \left(n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} ;$$

$$\text{(v)} \left(\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} ;$$

$$\text{(vi)} \left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} ;$$

$$\text{(vii)} \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} ;$$

$$\text{(viii)} \left(\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}\sqrt[n]{k+n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} .$$

Exercice 48.

Montrer que $\dfrac{e}{4n}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exercice 49.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Déterminer la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer la limite de $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant\ell\leqslant n} f\left(\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{\ell}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 50$^+$.

Soit $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Déterminer la limite de $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 51.

Déterminer un équivalent simple des suites

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \left(\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} .$$

Exercice 52$^+$. X

Soit $f \in C^0([a,b])$ à valeurs strictement positives et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe une unique subdivision $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ telle que
$$\forall i \in [\![1,n]\!], \int_{x_{i-1}}^{x_i} f = \frac{1}{n}\int_a^b f.$$
2. Quelle est la limite de la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Formules de Taylor

Autocorrection J. ☑

Montrer les inégalités suivantes.

(i) $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$; (ii) $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Exercice 53. ☑

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\sin x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \text{et} \qquad \cos x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Exercice 54.

1. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer
$$\forall x \in [0,1], x^2 - \frac{1}{3}x^4 \leqslant \sin^2 x \leqslant x^2.$$
2. En déduire la limite de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 55.

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$
2. En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
3. Comment approcherait-on $\ln(1/2)$ et $\ln 4$?

Exercice 56$^+$. 💡☑

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré impair tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant |P(x)|.$$

1. Montrer que f est la fonction nulle.
2. Le résultat reste-t-il vrai si $\deg P$ est pair ?

Exercice 57^{++} (Inégalité de Kolmogorov).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, telle que f et f'' soient bornées. On note

$$M_0 = \sup_{\mathbb{R}} |f| \qquad \text{et} \qquad M_2 = \sup_{\mathbb{R}} |f''|.$$

1. Justifier l'existence de M_0 et M_2.
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x_0 et $x_0 + h$, montrer que pour tout $h > 0$, on a $|f'(x_0)| \leqslant \dfrac{2M_0}{h} + h\dfrac{M_2}{2}$.
3. En déduire que f' est aussi bornée et que $\sup_{\mathbb{R}} |f'| \leqslant 2\sqrt{M_0M_2}$.

Mélange

Exercice 58.

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(1) = \int_0^1 f$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 59.

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Montrer $\exists c \in]0, 1[: f(c) = 3\int_0^1 x^2 f(x)\,dx$.

Exercice 60.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, non identiquement nulle, telle que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \int_a^b t^k f(t)\,dt = 0.$$

Montrer que f change au moins n fois de signe sur $]a, b[$.

Exercice 61.

Soit $f \in C^0([0, \pi])$ tel que $\int_0^\pi f(t)\,\cos(t)\,dt = \int_0^\pi f(t)\,\sin(t)\,dt = 0$.

Montrer que f admet au moins deux zéros sur $]0, \pi[$.

Exercice 62^{+}. ☑

Soit $f \in C^0([0, 1])$. Déterminer la limite de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 63^{+++} (Polynômes préservant la mesure de Lebesgue).

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ qui envoient $[0, 1]$ dans lui-même et tels que

$$\forall f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}), \int_0^1 f(P(t))\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Prolongement de la théorie

Exercice 64^{+}.

Soit $f \in C^0([0,1])$.

1. **Théorème de Heine.** On veut montrer que f est *uniformément continue*, c'est-à-dire que
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [0,1], |x_1 - x_2| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \varepsilon.$$
   (a) On suppose que l'assertion précédente est fausse. Construire un nombre $\varepsilon > 0$ et deux suites $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0,1]$ telles que
$$\xi_n - \eta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, |f(\xi_n) - f(\eta_n)| > \varepsilon.$$
   (b) En utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass, obtenir une contradiction (et conclure la démonstration du théorème de Heine).
2. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier φ telle que f et φ soient *uniformément ε-proches*, au sens où $\forall x \in [0,1], |f(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 65^{++} (Intégration des relations de comparaison).

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs strictement positives.

1. Quel sont les comportements possibles de $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \varphi(t)\,dt$ quand $x \to +\infty$?

Dans toute la suite, on suppose en outre que $\displaystyle\int_1^x \varphi(t)\,dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

2. **Intégration de la négligeabilité.** Dans cette question, on considère une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\big(\varphi(x)\big)$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$.
      i. Montrer qu'il existe $a \geqslant 1$ tel que
$$\forall x \geqslant a, \left|\int_a^x f(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon \int_1^x \varphi(t)\,dt.$$
      ii. En déduire qu'il existe $x_0 \geqslant 1$ tel que
$$\forall x \geqslant x_0, \left|\int_1^x f(t)\,dt\right| \leqslant 2\varepsilon \int_1^x \varphi(t)\,dt.$$
   (b) Montrer $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\int_1^x \varphi(t)\,dt\right)$.
3. **Intégration des équivalents.** Dans cette question, on considère une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \varphi(x)$.

   Montrer $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_1^x \varphi(t)\,dt$.
4. **Applications.**
   (a) **Théorème de Cesàro continu.** Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+)$ tel que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.

   Montrer $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.
   (b) Déterminer un équivalent de $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{t\,dt}{\arctan(t)}$ quand $x \to +\infty$.
   (c) Donner un équivalent de $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$ quand $x \to +\infty$.