Équations différentielles linéaires

Exercice 16.
On pourra procéder par analyse et synthèse et, dans la phase d'analyse, « dériver la relation ».

Exercice 21.
On pourra introduire les parties paires et impaires de la fonction f.

Exercice 28.

1. On pourra considérer la fonction $w : x \mapsto C + \displaystyle\int_0^x u(t)\, v(t)\, dt$.

Exercice 29.
On pourra poser $g = f + f'$ et exprimer f comme solution d'une certaine équation différentielle.

Autocorrection

Autocorrection A.

(i) $\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-x/4} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{C} \right\}$;

(ii) $\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto e^{x-x^2} + \lambda e^{-x^2} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{C} \right\}$;

(iii) $\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \left(\dfrac{3}{2}x^2 + \lambda \right) \ln x \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{C} \right\}$;

(iv) $\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto -1 + \lambda e^{-x^3/3} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{C} \right\}$;

(v) $\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \dfrac{1}{12}\dfrac{\sin 3x}{\cos x} + \dfrac{3}{4}\tan x + \dfrac{1}{2\cos x}\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} + \dfrac{\lambda}{\cos x} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{C} \right\}$;

(vi) $\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto -1 + \lambda \exp(\arcsin x) \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{C} \right\}$;

(vii) $\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \operatorname{sh} x + x\operatorname{ch} x + \lambda \operatorname{ch} x \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{C} \right\}$;

(viii) $\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto -\cos(x)x^2 + \lambda x^2 \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{C} \right\}$;

(ix) $\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \ln(1+x)^2 + \lambda \ln(1+x) + \mu \,\middle|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$.

Autocorrection B.

(i) $\left\{ x \mapsto \lambda \cos\left(\dfrac{3}{2}x \right) + \mu \sin\left(\dfrac{3}{2}x \right) \,\middle|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$;

(ii) $\left\{ x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-x} \,\middle|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$;

(iii) $\left\{ x \mapsto \dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{x^2}{2} + \lambda x + \mu \right) e^{-2x} \,\middle|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$;

(iv) $\left\{ x \mapsto \dfrac{x\,\mathrm{sh}\,x}{2} + \lambda\,\mathrm{ch}\,x + \mu\,\mathrm{sh}\,x \,\middle|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \right\} = \left\{ x \mapsto \dfrac{x\,\mathrm{sh}\,x}{2} + \lambda e^{x} + \mu e^{-x} \,\middle|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$;

(v) $\left\{ x \mapsto \dfrac{e^{x}}{8} + \left(-\dfrac{1}{4}x^2 + \lambda x + \mu \right) e^{-x} \,\middle|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$;

(vi) $\left\{ x \mapsto \dfrac{\cos x}{3} - \dfrac{\sin x}{3} + \lambda \exp\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}x \right) + \mu \exp\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}x \right) \,\middle|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$;

(vii) $\left\{ x \mapsto -\dfrac{e^{2x}}{30}\left(\cos(3x) + 3\sin(3x) \right) + \lambda e^{x} + \mu e^{2x} \,\middle|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$;

(viii) $\left\{ x \mapsto (x+\mu)e^{x}\sin(2x) + \lambda e^{x}\cos(2x) \,\middle|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$;

(ix) $\left\{ x \mapsto \left(\dfrac{3}{2}x + \lambda \right) e^{3x} + \mu e^{x} \,\middle|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$;

(x) $\left\{ x \mapsto \dfrac{\sin x - 3\cos x}{10} + \lambda e^{-2x} + \mu e^{x} \,\middle|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$;

(xi) $\left\{ x \mapsto \left(\dfrac{3}{8}x + \mu \right)\sin x - \dfrac{1}{32}\cos 3x + \lambda \cos x \,\middle|\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$.