Équations différentielles linéaires

Calculs

Premier ordre

Autocorrection A. ☑
Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés.

(i) $4y' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$;
(ii) $y' + 2xy - e^{x-x^2} = 0$ sur $\mathbb{R}$;
(iii) $xy' \ln(x) - y = 3x^2(\ln x)^2$ sur $]0,1[$;
(iv) $y' + x^2y + x^2 = 0$ sur $\mathbb{R}$;
(v) $y' - y\tan x = \cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$;
(vi) $y'\sqrt{1-x^2} - y = 1$ sur $]-1,1[$;
(vii) $y' \operatorname{ch} x - y \operatorname{sh} x = 1 + \operatorname{ch}^2 x$ sur $\mathbb{R}$;
(viii) $xy' - 2y = x^3 \sin x$ sur $\mathbb{R}_+^*$;
(ix) $(1+x)^2y'' + (1+x)y' - 2 = 0$ sur $]-1,+\infty[$.

Exercice 1. ☑
Soit $\tau \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ une fonction polynomiale de degré n.

1. Montrer que l'équation $y' + ay = f(x)e^{\tau x}$ admet une solution de la forme $x \mapsto g(x)e^{\tau x}$, où g est une fonction polynomiale
   - de degré n si $a + \tau \neq 0$;
   - de degré $n+1$ si $a + \tau = 0$.
2. Résoudre les équations différentielles suivantes (on cherchera les solutions réelles) :
   (i) $y' + y = (x^2 - 2x + 2)e^{2x}$;
   (ii) $y' - 2y = \operatorname{sh} x - 2x \operatorname{ch} x$;
   (iii) $y' - 3y = xe^x(x + e^{2x})$.

Deuxième ordre

Autocorrection B. ☑
Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$ (on cherchera uniquement les solutions à valeurs réelles) :

(i) $4y'' + 9y = 0$;
(ii) $y'' + 2y' + y = 0$;
(iii) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} + 1$;
(iv) $y'' - y = \operatorname{ch} x$;
(v) $y'' + 2y' + y = \operatorname{sh} x$;
(vi) $y'' - 3y' + y = \sin x + \cos x$;
(vii) $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}\sin(3x)$;
(viii) $y'' - 2y' + 5y = 4e^x\cos(2x)$;
(ix) $y'' - 4y' + 3y = 3e^{3x}$;
(x) $y'' + y' - 2y = \cos(x)$;
(xi) $y'' + y = \cos^3(x)$.

Exercice 2.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - (1+\alpha)y' + \alpha y = e^{(1+\alpha)x}$.

Exercice 3. ☑

1. Montrer que l'équation $y'' + y = 3x^2$ a une solution polynomiale.
2. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + y = 3x^2 \\ y(0) = 1 \text{ et } y'(0) = 2. \end{cases}$

Exercice 4.
Soit $\omega, \theta \in \mathbb{R}_+$. Résoudre les équations différentielles

$$y'' + \omega^2 y = \cos(\theta x) \qquad \text{et} \qquad y'' + \omega^2 y = \sin(\theta x).$$

Techniques supplémentaires

Exercice 5. ☑
On considère l'équation différentielle (É) : $(1 + x^2)y'' - 2y = 0$.

1. On suppose que (É) possède une solution f telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$. Soit $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $g : x \mapsto \lambda(x)f(x)$. Montrer que g est solution de (É) si et seulement si λ' est solution de $y' + 2\dfrac{f'(x)}{f(x)}y = 0$.
2. Utiliser la question précédente pour résoudre (É).

Exercice 6 (Variation des constantes). ☑

1. On considère, sur $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, l'équation différentielle (É) : $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ et l'équation homogène associée (ÉH) : $y'' + y = 0$.
   Les trois premières sous-questions ne servent essentiellement qu'à motiver les conditions $(\star)$.
   (a) Montrer que les solutions de « l'équation différentielle matricielle » (ÉM) : $\Phi' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Phi$ sont les fonctions de la forme $\Phi : x \mapsto \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix}$, où $f \in D^2(I;\mathbb{C})$ est solution de l'équation homogène (ÉH), c'est-à-dire les fonctions $x \mapsto \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \Lambda$, pour Λ décrivant $\mathbb{C}^2$.
   (b) Soit $f \in D^2(I;\mathbb{C})$.
   Montrer qu'il existe $\Lambda : I \to \mathbb{C}^2$ dérivable telle que $\forall x \in I, \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \Lambda(x)$ si et seulement s'il existe deux fonctions dérivables $\lambda, \mu : I \to \mathbb{C}$ tels que
   $$\forall x \in I, \begin{cases} f(x) = \lambda(x)\cos(x) + \mu(x)\sin(x) \\ f'(x) = -\lambda(x)\sin(x) + \mu(x)\cos(x) \end{cases} \qquad (\star)$$
   et que, si la condition $(\star)$ est vérifiée, on a $\forall x \in I, \lambda'(x)\cos(x) + \mu'(x)\sin(x) = 0$.
   (c) Trouver une solution de (É) vérifiant les conditions $(\star)$, puis résoudre (É).
2. Utiliser la méthode de la question précédente, appellée *méthode de variation des constantes*, pour résoudre les équations différentielles suivantes :

   (i) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{x-1}{x^2}e^{-x}$, sur $\mathbb{R}_+^*$;
   (ii) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x \ln x}{x}$, sur $\mathbb{R}_+^*$;
   (iii) $y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)e^x$, sur $\mathbb{R}$;
   (iv) $y'' + 4y = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, sur $]0, \pi[$.

Exercice 7. ☑

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

(i) $(1+x^2)y''+2xy'=0$ (on introduira la fonction $x\mapsto(1+x^2)y'(x)$) ;

(ii) $(1+e^x)y''+y'-e^xy=0$ ($x\mapsto y'(x)+y(x)$) ;

(iii) $y''+4xy'+(3+4x^2)y=0$ ($x\mapsto e^{x^2}y(x)$) ;

(iv) $(1+e^x)^2y''-2e^x(1+e^x)y'-(3e^x+1)y=0$ ($x\mapsto \dfrac{y(x)}{1+e^x}$) ;

(v) $xy''-(1+x)y'+y=1$ ($x\mapsto y'(x)-y(x)$) ;

(vi) $xy''+2(x+1)y'+(x+2)y=0$ ($x\mapsto xy(x)$) ;

(vii) $(1+e^x)y''+2e^xy'+(2e^x+1)y=xe^x$ ($x\mapsto(1+e^x)y(x)$).

Exercice 8.

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $x^2+y^2-2xyy'=0$.

Exercice 9. ☑

Résoudre les équations différentielles suivantes :

(i) $x^2y''+3xy'+y=(x+1)^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (en « posant $x=e^t$ », c'est-à-dire en introduisant la fonction $z : t\mapsto y(e^t)$ et en trouvant une équation différentielle satisfaite par z) ;

(ii) $(1+x^2)^2y''+2x(1+x^2)y'+4y=0$ sur $\mathbb{R}$ (en posant $x=\tan t$) ;

(iii) $(1-x^2)y''-xy'+y=0$ sur $]-1,1[$ (en posant $x=\sin t$).

Équations non résolues, ou non linéaires

Exercice 10. ☑

On considère l'équation différentielle

$$xy'=2y+x \qquad (\text{É})$$

sur $\mathbb{R}$. Cette équation n'est pas résolue, c'est-à-dire que le coefficient devant y' n'est pas 1.

1. En se ramenant à une équation résolue, déterminer l'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{R}_-^*)$ (resp. $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^*)$) des solutions (à valeurs réelles) de l'équation sur l'intervalle $\mathbb{R}_-^*$ (resp. $\mathbb{R}_+^*$).
2. En déduire l'ensemble $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des solutions de (É).
3. Montrer que dans le théorème de Cauchy linéaire vu en cours, on ne peut pas se passer de l'hypothèse selon laquelle l'équation est résolue.

Exercice 11.

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

(i) $xy'-y-x^2=0$;

(ii) $xy'+y-x^2=0$;

(iii) $\mathrm{sh}(x)y'-\mathrm{ch}(x)y=1$;

(iv) $xy'+(x+1)y=x+1$;

(v) $xy'+|x|y=x^2e^{-|x|}$;

(vi) $(x^2-1)y'=xy$;

(vii) $x(x+1)y'+y=\arctan x$;

(viii) $\sin(x)y'-\cos(x)y=1$.

Exercice 12.

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+)$. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f$ admet une limite en 0, que l'on précisera.

En déduire que l'équation différentielle $xy' + y = f(x)$ a une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ prolongeable par continuité en 0.

Exercice 13.

Résoudre l'équation différentielle $y' = 1 + y^2$ sur $\mathbb{R}$.

Équations fonctionnelles

Exercice 14.

Montrer que

$$\left\{ f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}) \;\middle|\; f' = f \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\})$ et en exhiber une base.

Exercice 15.

Déterminer $\left\{ f \in C^1(\mathbb{R}) \;\middle|\; \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = \displaystyle\int_0^1 f \right\}$.

Exercice 16⁺.

Déterminer les applications $f \in C^0(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + 1 = \int_0^{\pi - x} f.$$

Exercice 17.

Soit $E = \left\{ f \in D(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \;\middle|\; \forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, f(s + t) = f(s)f(t) \right\}$. On cherche à décrire cet ensemble plus précisément.

1. Donner des exemples d'éléments de E.
   Dans les quatre questions suivantes, on fixe un élément $f \in E$.
2. Montrer que $f(0) \in \{0, 1\}$.
3. Montrer que si $f(0) = 0$, alors $f = 0$.
4. Montrer que $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, f'(s + t) = f'(s)f(t)$.
5. En déduire une équation différentielle vérifiée par f, puis une expression de f.
6. Conclure.

Exercice 18.

Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in D(\mathbb{R})$ telles que $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, f(s + t) = f(s) + f(t)$.

Exercice 19.

Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in D(\mathbb{R}_+^*)$ telles que $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, f(st) = f(s)f(t)$.

Exercice 20.

Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in D(\mathbb{R})$ telles que $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, f(s + t) = e^t f(s) + e^s f(t)$.

Exercice 21⁺.

Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in D(\mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x$.

Études qualitatives

Exercice 22.

Soit $a, b : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues définies sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Montrer que les tangentes en x_0 des différentes solutions de l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$ sont soit parallèles, soit concourantes.

Exercice 23.

Soit $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et y et z deux fonctions dérivables telles que

$$y(0) = z(0) = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, z'(x) \leqslant a(x)z(x) + b(x).$$

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, z(x) \leqslant y(x)$.

Exercice 24$^+$.

Soit $u, \alpha \in \mathbb{R}$. À quelle condition toutes les solutions de $y'' + (1 - iu)y' - iuy = e^{i\alpha x}$ sont-elles bornées sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 25.

Soit $a, b \in C^0(\mathbb{R})$ et f, g deux solutions de l'équation différentielle $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$.

On pose $w : x \mapsto f(x)\, g'(x) - f'(x)\, g'(x)$.

1. Trouver une équation différentielle vérifiée par w.
2. En utilisant le théorème de Cauchy linéaire, montrer que sont équivalentes :

   (i) $\exists x_0 \in \mathbb{R} : w(x_0) \neq 0$; (ii) $\forall x_0 \in \mathbb{R}, w(x_0) \neq 0$; (iii) (f, g) est libre.

Exercice 26.

Déterminer les $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toute solution de $y'' + ay' + by = 0$ soit bornée sur $\mathbb{R}_+$ (resp. $\mathbb{R}$).

Exercice 27.

Soit f une solution de $y'' - 2y' + y = 2e^x$.

1. Montrer que $f' \geqslant 0 \Rightarrow f \geqslant 0$.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 28$^+$ (Lemme de Gronwall).

1. Soit $C \in \mathbb{R}$ et $u, v \in C^0(\mathbb{R}_+)$ telles que $v \geqslant 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+, u(x) \leqslant C + \int_0^x u(t)\, v(t)\, dt$.

   Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, u(x) \leqslant C \exp\left(\int_0^x v(t)\, dt\right)$.
2. **Application.** Soit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction k-lispchitzienne et $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation différentielle (non linéaire) $y' = H(y)$ (c'est-à-dire que $f' = H \circ f$ et $g' = H \circ g$). Montrer $\forall x \in \mathbb{R}_+, \left|f(x) - g(x)\right| \leqslant e^{kx}\, |f(0) - g(0)|$.

Exercice 29^{++}. *X*

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ telle que $f'(x) + f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.