Analyse asymptotique

Exercice 4.
Il est possible d'obtenir un tel développement asymptotique à l'aide du $DL_n(0)$ de arctan.

Exercice 6.
La formule de Taylor-Young peut suffire, au prix d'une démonstration epsilonesque (pas question de sommer n développements limités à la diable). Les formules de Taylor globales peuvent donner une démonstration plus directe.

Autocorrection

Autocorrection A.

(i) $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$;

(ii) $\dfrac{x^4+3x^2-x+2}{2x^3-x} \underset{x\to0}{\sim} -\dfrac{2}{x}$ et $\dfrac{x^4+3x^2-x+2}{2x^3-x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{2}$;

(iii) $\ln(1+x^2)-\sin(x^2)+2\cos^2(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\ln x$;

(iv) $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x-1}} \underset{x\to1}{\sim} \sqrt{x-1}$;

(v) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2+x} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{2+x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$;

(vi) $1+e^{e^{e^x}}-\arctan x \underset{x\to-\infty}{\sim} 1+e+\dfrac{\pi}{2}$;

(vii) $\sqrt{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^{-1/4}}{\sqrt{2}}$;

(viii) $\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \underset{x\to\pi}{\sim} \dfrac{\pi-x}{\sqrt{\pi}}$;

(ix) $\dfrac{\sqrt{x}^3+2}{\sqrt[3]{x}^2+3} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{5/6}$;

(x) $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$;

(xi) $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x\ln x}$;

(xii) Pour tout $x>e$, on a

$$\begin{aligned}\sqrt{\ln(x+1)}-\sqrt{\ln(x-1)} &= \sqrt{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}-\sqrt{\ln\left(x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)}\\ &= \sqrt{\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{\ln x+\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\ln x}\left(\sqrt{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} - \sqrt{1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\ln x}}\right).$$

Cette expression peut paraître horrible, mais on a en fait appliqué à fond l'idée de factoriser par les termes prépondérants, et on se retrouve maintenant dans une position idéale pour utiliser des DL de $u \mapsto \ln(1+u)$ ou $u \mapsto \sqrt{1+u}$.
Or, quand $x \to +\infty$,

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{car } \begin{cases} \ln(1+u) = 1+u+\underset{u\to 0}{o}(u) \\ \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \end{cases}$$

$$\text{donc} \qquad \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x} + o\left(\frac{1}{x\ln x}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} &= \sqrt{1+\frac{1}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)} \\ &= 1+\frac{1}{2}\frac{1}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right) \quad \text{car } \begin{cases} \sqrt{1+u} = 1+\frac{1}{2}u+\underset{u\to 0}{o}(u) \\ \dfrac{1}{x\ln x}+o\left(\dfrac{1}{x\ln x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \\ \dfrac{1}{x\ln x}+o\left(\dfrac{1}{x\ln x}\right) = O\left(\dfrac{1}{x\ln x}\right). \end{cases}\end{aligned}$$

Exactement de la même façon,

$$\sqrt{1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} = 1-\frac{1}{2}\frac{1}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} - \sqrt{1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} &= \frac{1}{x\ln x}+o\left(\frac{1}{x\ln x}\right) \\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x\ln x}.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après les propriétés multiplicatives de l'équivalence,

$$\begin{aligned}\sqrt{\ln(1+x)}-\sqrt{\ln(1-x)} &= \sqrt{\ln x}\left(\sqrt{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} - \sqrt{1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\ln x}}\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\ln x}\times\frac{1}{x\ln x} \\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}.\end{aligned}$$

(xiii) $x \ln(x+1) - (x+1)\ln x \underset{x \to +\infty}{\sim} -\ln x$;

(xiv) $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} \underset{x \to 0}{\sim} x^2$;

(xv) $\tan x - \sin x \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}x^3$;

(xvi) $\ln(1+\sin x) \underset{x \to 0}{\sim} x$;

(xvii) $\ln(\ln(1+x)) \underset{x \to 0}{\sim} \ln x$;

(xviii) $\ln(\cos x) \underset{x \to \pi/2}{\sim} \ln\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.