

---

## Séries

---

**Exercice 4.**

On pourra se souvenir que si une suite converge vers  $\alpha > \beta$ , alors elle est  $> \beta$  à partir d'un certain rang.

**Exercice 6.**

On pourra montrer que  $x \mapsto \exp(-x^n)$  est convexe, et utiliser cette remarque pour minorer l'intégrale par une suite « en  $1/n$  ».

**Exercice 10.**

Le développement asymptotique  $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$  pourra être utile.

**Exercice 12.**

On pourra s'inspirer de la méthode générale vue en cours pour calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ .

**Exercice 21.**

Comme  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ , à partir d'un certain rang, on a...

**Exercice 22.**

On pourra s'inspirer de la démonstration élémentaire, due à Nicolas Oresme, de la divergence de  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  qui s'obtient en « faisant des paquets ».

**Exercice 34.**

Pour la deuxième question, on pourra montrer que  $\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\alpha-1}{n^\alpha}$ , puis appliquer la question précédente à cette série télescopique.

## Autocorrection

**Autocorrection A.**

Les relations d'équivalence ou de domination données dans la suite sont parfois le fruit d'un calcul non trivial.

- (i) On a  $n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  : la série diverge grossièrement.
- (ii) On a  $\left(\frac{n}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  : la série diverge grossièrement.
- (iii) On a  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$  par croissance comparée : la série converge par comparaison à une série de Riemann (technique standard pour les séries « à l'air exponentiel »).
- (iv) On a  $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$  : la série diverge par comparaison à une série de Riemann.

- (v) On a  $1 - \cos \frac{\pi}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{2n^2}$  : la série converge par comparaison à une série de Riemann.
- (vi) On a  $\frac{(-1)^n + n}{n^2 + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$  : la série diverge par comparaison à une série de Riemann.
- (vii) On a  $|a^n n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  dès que  $a \neq 0$ . Ainsi, la série converge (elle est nulle à partir d'un certain rang) si  $a = 0$ , et diverge grossièrement dans tous les autres cas.
- (viii) On a  $ne^{-\sqrt{n}} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{n^2} \right)$  par croissance comparée : la série converge par comparaison à une série de Riemann (technique standard pour les séries « à l'air exponentiel »).
- (ix) Distinguons trois cas :
- ▶ si  $a \leq 0$ , la série diverge grossièrement ;
  - ▶ si  $0 < a \leq 1$ , on a  $\frac{1}{n} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{\ln n}{n^a} \right)$ , et la série diverge par comparaison à une série de Riemann ;
  - ▶ si  $a > 1$ , on peut trouver un réel  $1 < b < a$ , et on a  $\frac{\ln n}{n^a} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{n^b} \right)$  (par croissance comparée) : la série converge par comparaison à une série de Riemann.
- (x) On a  $\ln \left( \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n - 1} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$  : la série converge par comparaison à une série de Riemann.
- (xi) On a  $\frac{\ln(n^2 + 3)\sqrt{2^n + 1}}{4^n} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{n^2} \right)$  : la série converge par comparaison à une série de Riemann (technique standard pour les séries « à l'air exponentiel »).
- (xii) On a  $\frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$ , donc  $\frac{1}{n} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)} \right)$  : la série diverge par comparaison à une série de Riemann.
- (xiii) On a  $\sqrt{\operatorname{ch} \frac{1}{n} - 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$  : la série diverge par comparaison à une série de Riemann.
- (xiv) On a  $\left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{n^2} \right)$  : la série converge par comparaison à une série de Riemann (technique standard pour les séries « à l'air exponentiel »).
- (xv) On a  $\left( n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^\alpha} = \exp \left[ -\frac{1}{6}n^{\alpha-2} + o(n^{\alpha-2}) \right]$ . On montre alors que la série diverge grossièrement si  $\alpha \leq 2$  et qu'elle converge si  $\alpha > 2$  car son terme général est alors  $\underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{n^2} \right)$  (technique standard pour les séries « à l'air exponentiel »).
- (xvi) On a  $\sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3} = \left( \frac{a}{3} - \frac{3}{2} \right) \frac{1}{n} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{n^2} \right)$ .
- Ainsi,
- ▶ si  $a \neq \frac{9}{2}$ , le terme général est équivalent à  $\underbrace{\left( \frac{a}{3} - \frac{3}{2} \right)}_{\neq 0} \frac{1}{n}$ , et la série diverge par comparaison à une série de Riemann ;
  - ▶ si  $a = \frac{9}{2}$ , le terme général est  $\underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{n^2} \right)$ , et la série converge par comparaison à une série de Riemann.
- (xvii) On a  $e^{1/n} - a - \frac{b}{n} = (1 - a) + \frac{1 - b}{n} + \underset{n \rightarrow +\infty}{O} \left( \frac{1}{n^2} \right)$ . Ainsi,
- ▶ si  $a \neq 1$ , le terme général tend vers  $1 - a \neq 0$ , et la série diverge grossièrement ;
  - ▶ si  $a = 1$  et  $b \neq 1$ , le terme général est équivalent à  $\frac{1 - b}{n}$ , et la série diverge par comparaison à une série de Riemann ;

► si  $a = b = 1$ , le terme général est  $\underset{n \rightarrow +\infty}{O} \left( \frac{1}{n^2} \right)$ , et la série converge par comparaison à une série de Riemann.

**Remarque :** il était habile d'effectuer un développement du terme général avec un terme d'erreur en  $\underset{n \rightarrow +\infty}{O} \left( \frac{1}{n^2} \right)$  plutôt que d'écrire un terme en  $\frac{*}{n^2}$  (qui n'aurait pas eu d'importance) puis un terme d'erreur en  $\underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{n^2} \right)$ .

(xviii) Le terme général est équivalent à  $2 \frac{\ln(n)}{n^a}$ . Ainsi, en reprenant le résultat d'une question précédente, la série converge si et seulement si  $a > 1$ .

### Autocorrection B.

1. Soit  $n \geq 1$ . La comparaison série-intégrale (cas décroissant) donne

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{n+1}^{2n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} + \left( \frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} &= \int_{n+1}^{2n+1} \frac{dt}{t} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \left[ 2\sqrt{t} \right]_{t=n+1}^{2n} + o(\sqrt{n}). \end{aligned}$$

Or,

$$\left[ 2\sqrt{t} \right]_{t=n+1}^{2n} = 2 \left( \sqrt{2n+1} - \sqrt{n+1} \right) = 2 \underbrace{\left( \sqrt{\frac{2n+1}{n}} - \sqrt{\frac{n+1}{n}} \right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2}-1} \sqrt{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2(\sqrt{2}-1) \sqrt{n},$$

d'où l'on tire

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2(\sqrt{2}-1) \sqrt{n}.$$

**Remarque.** Il serait aussi possible de modifier un peu la comparaison série-intégrale du cours pour simplifier les calculs ultérieurs : l'inégalité

$$\forall k \geq 2, \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

donne, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\int_n^{2n} \frac{dt}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \sum_{k=n+1}^{2n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \int_{k-1}^k \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_n^{2n} \frac{1}{\sqrt{t}} dt,$$

d'où l'on tire  $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \int_n^{2n} \frac{dt}{\sqrt{t}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2(\sqrt{2}-1) \sqrt{n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2(\sqrt{2}-1) \sqrt{n}.$

**Deuxième remarque.** On peut aussi effectuer un « changement d'échelle » intelligent pour se ramener à une somme de Riemann (ce qui est un autre type de comparaison série-intégrale) :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}} = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\ell}{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = 2(\sqrt{2}-1).$$

2. Soit  $n \geq 2$ . Par comparaison série-intégrale,

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \leq \int_2^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} + \frac{1}{2 \ln 2} - \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} \leq \int_2^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} + \frac{1}{2 \ln 2},$$

donc (avec une petite idée pour se simplifier les calculs)

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} = \int_2^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} + O(1) = \int_2^n \frac{dt}{t \ln t} + \underbrace{\int_n^{n+1} \frac{dt}{t \ln t}}_{=O\left(\frac{1}{n \ln(n)}\right)=O(1)} + O(1) = \int_2^n \frac{dt}{t \ln t} + O(1).$$

Or,

$$\int_2^n \frac{dt}{t \ln t} = [\ln(\ln t)]_{t=2}^n = \ln(\ln n) - \ln \ln 2 = \ln(\ln n) + O(1).$$

In fine,

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} = \int_2^n \frac{dt}{t \ln t} + O(1) = \ln(\ln n) + O(1) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(\ln n).$$