Probabilités I

Exercice 9.

Aller voir https://www.youtube.com/watch?v=ebEkn-BiW5k.

Exercice 21.

Commencer par définir précisément l'espace probabilisé fini.

On se retrouve ensuite face à un problème de dénombrement pas complètement évident. L'événement contraire est à chaque fois plus facile à analyser.

Dans les deux cas, on se retrouve à analyser des configurations dans lesquelles certaines cartes ne peuvent pas se cotoyer. On peut compter les configurations vérifiant cette contrainte en imaginant qu'on « insère » ces cartes, dans un certain ordre, dans le jeu constitué des autres cartes : cela permet d'utiliser le principe de multiplication.

Exercice 25.

Se convaincre que les variables aléatoires sont indépendantes, puis essayer d'utiliser le système complet d'événements défini par la variable aléatoire X_n.

Exercice 30.

Un argument sans aucun calcul vient du lien entre les variables binomiales et celles de Bernoulli.

Exercice 31.

Pour la question 2, on pourra remarquer que le raisonnement de la question 1 n'utilise pas du tout le fait que le dé ait dix faces.

Notamment, si on lançait un dé à cent faces (numérotées de 0 à 99), la probabilité d'obtenir 66 au moins une fois tendrait vers 1 quand $n \to +\infty$. Comment faire le lien entre ce fait et la deuxième question ?

Exercice 32.

Il vaut mieux ne pas chercher à calculer $p(n)$ exactement, qui dépend de considérations arithmétiques difficiles à analyser exactement.

En notant $\Omega_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b, c, d \in [\![-n, n]\!] \right\}$, on pourra donc chercher à montrer que l'événement $\overline{\mathcal{I}_n} = \Omega_n \setminus GL_2(\mathbb{R})$ est inclus dans un ensemble E_n vérifiant $n^{-4} |E_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Cela permet de « négliger » des subtilités. Par exemple, si pour une raison ou une autre notre analyse est plus difficile dans le cas où l'un des coefficients s'annule, on pourra toujours s'en moquer car l'ensemble des matrices de Ω_n dont l'un des coefficients s'annule a un cardinal $\leqslant 4 \times (2n+1)^3$, donc il « disparaît » dans le calcul de la limite des probabilités.

Exercice 34.

On pourra chercher à écrire la variable aléatoire $N = |X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n|$ comme une somme de n variables de Bernoulli, et vérifier que ces variables sont indépendantes.

Autocorrection

Autocorrection A.

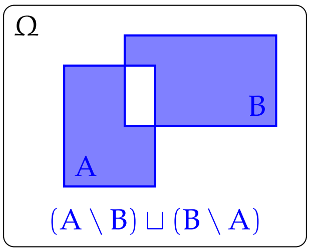
Cela provient directement de l'union disjointe

$$A = (A \cap B) \sqcup (A \setminus B)$$

et de l'axiome d'additivité.

(On peut aussi appliquer la formule des probabilités totales à l'événement A et au système complet d'événements $(B, \overline{B})$, en remarquant que $A \setminus B = A \cap \overline{B}$).

Autocorrection B.



Donnons deux méthodes.

Dans les deux méthodes, on aura besoin de calculer $P(A \cap B)$. Faisons-le donc dès maintenant.

On a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, donc

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= \frac{7}{10} + \frac{1}{2} - \frac{9}{10} \\ &= \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Première méthode. On remarque que les deux événements $A \setminus B$ et $B \setminus A$ sont incompatibles/disjoints (puisque $A \setminus B \subseteq A$ et $B \setminus A \subseteq \overline{A}$, par exemple). On peut donc utiliser l'axiome d'additivité.

- Comme $A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$, on a d'après l'axiome d'additivité

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) \quad \text{donc} \quad P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{2}{5}.$$

- De même,

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5}.$$

Ainsi, par additivité,

$$P((A \setminus B) \sqcup (B \setminus A)) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

Deuxième méthode. On peut montrer que $(A \setminus B) \sqcup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (et cette opération s'appelle la *différence symétrique* de A et B, notée $A \triangle B$).

Comme $A \cap B \subseteq A \cup B$, on peut donc décomposer $A \cup B$ en union disjointe :

$$A \cup B = (A \triangle B) \sqcup (A \cap B),$$

donc on a par additivité

$$\begin{aligned} P(A \triangle B) &= P(A \cup B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{9}{10} - \frac{3}{10} \\ &= \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Autocorrection C.

D'après le cours, il existe une mesure de probabilité P sur Ω telle que $\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) = p_\omega$ si et seulement si $\forall \omega \in \Omega, p_\omega \geqslant 0$ et $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$.

Dans le cas particulier de l'exercice, on fixe une constante de proportionnalité $\alpha \in \mathbb{R}$: il existe une mesure de probabilité sur Ω telle que $\forall k \in [\![1, n]\!], P(\{k\}) = \alpha k$ si et seulement si $\forall k \in [\![1, n]\!], \alpha k \geqslant 0$ et $\sum_{k=1}^{n} \alpha k = 1$.

La première condition est simplement équivalente à $\alpha \geqslant 0$. La seconde est équivalente à

$$\alpha \sum_{k=1}^{n} k = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \alpha \frac{n(n+1)}{2} = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \alpha = \frac{2}{n(n+1)}.$$

Ainsi, l'unique mesure de probabilité sur $[\![1, n]\!]$ définie par

$$\forall k \in [\![1, n]\!], P(\{k\}) = \frac{2k}{n(n+1)}$$

satisfait à la condition de l'énoncé. (On peut noter de surcroît qu'elle est la seule à le faire, même si ce n'était pas demandé).

Autocorrection D.

On modélise la situation par l'espace probabilisé fini (Ω, P), où $\Omega = [\![1, 6]\!]^3$ et P est la mesure de probabilité uniforme (d'après le cours, cela rend le résultat des différents lancers indépendants, ce qui est une hypothèse implicite dans l'énoncé, mais raisonnable).

On a en particulier $|\Omega| = 6^3 = 216$.

(i) Il s'agit de calculer $P(A)$, où

$$A = \{(i_0, i_1, i_2) \in \Omega \mid i_0 = 6 \text{ ou } i_1 = 6 \text{ ou } i_2 = 6\}.$$

Remarquons que le complémentaire de A est

$$\begin{aligned} \Omega \setminus A &= \{(i_0, i_1, i_2) \in \Omega \mid i_0 \neq 6 \text{ et } i_1 \neq 6 \text{ et } i_2 \neq 6\} \\ &= [\![1, 5]\!]^3, \\ \text{donc} \quad |\Omega \setminus A| &= 5^3 = 125 \\ \text{donc} \quad P(\Omega \setminus A) &= \frac{|\Omega \setminus A|}{|\Omega|} \\ &= \frac{125}{216} \\ \text{donc} \quad P(A) &= 1 - P(\Omega \setminus A) \\ &= 1 - \frac{125}{216} \end{aligned}$$

$$= \frac{91}{216}.$$

(On peut également utiliser le principe de soustraction pour déterminer $|A|$, puis en déduire $P(A)$).

(ii) Il s'agit de calculer $P(B)$, où

$$B = \{(i_0, i_1, i_2) \in \Omega \mid \exists! \ell \in \{0, 1, 2\} : i_\ell = 6\}.$$

Pour construire un élément de B, on peut

- choisir l'indice $\ell \in \{0, 1, 2\}$ tel que $i_\ell = 6$: 3 possibilités ;
- pour les deux autres indices, choisir une valeur différente de 6 : 5×5 possibilités.

D'après le principe de multiplication, on a

$$\begin{aligned} |B| &= 3 \times 5 \times 5 = 75 \\ \text{donc} \quad P(B) &= \frac{|B|}{|\Omega|} \\ &= \frac{75}{216} \\ &= \frac{25}{72}. \end{aligned}$$

(On peut également utiliser le principe d'addition et dénombrer l'ensemble B_ℓ des triplets qui ont un 1 en ℓ-ième position uniquement).

(iii) Notons C l'ensemble des triplets de Ω qui possèdent au moins une paire. On va dénombrer son complémentaire

$$\Omega \setminus C = \{(i_0, i_1, i_2) \in \Omega \mid i_0 \neq i_1 \neq i_2 \neq i_0\}.$$

Pour construire un élément (i_0, i_1, i_2) de C, on peut

- choisir la valeur i_0 : 6 possibilités ;
- choisir la valeur i_1, différente de la précédente : 5 possibilités ;
- choisir la valeur i_2, différente des deux précédentes : 4 possibilités.

Par principe de multiplication, on obtient

$$\begin{aligned} |\Omega \setminus C| &= 6 \times 5 \times 4 = 120 \\ \text{donc} \quad P(\Omega \setminus C) &= \frac{120}{216} \\ &= \frac{5}{9} \\ \text{donc} \quad P(C) &= 1 - P(C) \\ &= 1 - \frac{5}{9} \\ &= \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

(iv) Notons D l'ensemble des triplets de Ω qui possèdent au moins une paire et dont la somme des coordonnées est paire. On le décompose comme une union disjointe $D = D_2 \sqcup D_3$, où D_2 est l'ensemble des triplets possédant exactement une paire (et une troisième carte de hauteur différente) et dont la somme des coordonnées est paire et D_3 est l'ensemble des triplets de la forme (i, i, i), avec $3i$ pair (ce qui est équivalent à i pair).

Pour construire un élément de D_2, on peut :

- choisir l'emplacement des deux coordonnées égales : $\binom{3}{2} = 3$ possibilités ;
- choisir la valeur de la troisième coordonnée (qui doit être paire pour que la somme des coordonnées soit paire) : 3 possibilités ;
- choisir la valeur des deux coordonnées égales, différente de la précédente : 5 possibilités.

Ainsi, par principe de multiplication, $|D_2| = 3 \times 3 \times 5 = 45$.
Par ailleurs,

$$D_3 = \{(2,2,2), (4,4,4), (6,6,6)\},$$

donc $|D_3| = 3$.
Par principe d'addition, on a

$$\begin{aligned} |D| &= |D_2 \sqcup D_3| \qquad\qquad = |D_2| + |D_3| \\ &= 45 + 3 \\ &= 48 \\ \text{donc} \quad P(D) &= \frac{48}{216} \\ &= \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Autocorrection E.

Comparons les deux situations.

- Dans la situation A, on a quatre variables aléatoires $X_1, X_2, X_3, X_4 : \Omega \to \{0, 1\}$ indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ (l'événement $(X_k = 1)$ correspondant à la panne du k-ième moteur). On cherche à estimer la probabilité que l'avion arrive à bon port, c'est-à-dire la probabilité que le nombre de moteurs défaillants soit < 2. Or, ce nombre est exactement $N = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$, qui suit d'après le cours une loi binomiale $\mathcal{B}(4, p)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P(\text{l'avion A arrive à bon port}) &= P(N < 2) \\ &\overset{\sqcup}{=} P(N = 0) + P(N = 1) \\ &= \binom{4}{0} p^0 (1-p)^4 + \binom{4}{1} p^1 (1-p)^3 \\ &= (1-p)^4 + 4p(1-p)^3 \\ &= (1-p)^3 \left[1 - p + 4p\right] \\ &= (1-p)^3 (1 + 3p). \end{aligned}$$

l'égalité $\overset{\sqcup}{=}$ provenant de l'égalité d'événements

$$(N < 2) = (N = 0) \sqcup (N = 1)$$

et de l'additivité des probabilités.

- On modélise la situation B de la même façon, avec cette fois-ci deux variables aléatoires indépendantes $Y_1, Y_2 \sim \mathcal{B}(p)$ et leur somme $M = Y_1 + Y_2 \sim \mathcal{B}(2, p)$. On a alors, par le même genre de calculs,

$$\begin{aligned} P(\text{l'avion B arrive à bon port}) &= P(M < 1) \\ &= P(M = 0) \\ &= \binom{2}{0} p^0 (1-p)^2 \end{aligned}$$

$$= (1-p)^2.$$

Ainsi, (en supposant $p \in]0,1[$, les cas extrêmes n'ayant que peu d'intérêt) la situation B est plus rassurante que la situation A si et seulement si

$$\begin{aligned}(1-p)^2 > (1-p)^3(1+3p) &\Leftrightarrow 1 > (1-p)(1+3p)\\ &\Leftrightarrow 1 > 1+2p-3p^2\\ &\Leftrightarrow 3p^2 > 2p\\ &\Leftrightarrow p > \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Autocorrection F.

Notons U et D : $\Omega \to [\![1,6]\!]$ les variables aléatoires décrivant les résultats du premier et du deuxième lancer. Il est raisonnable de supposer que U et D sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$.

La variable aléatoire $X = U - D$ prend alors ses valeurs dans $[\![-5,5]\!]$ et on a

$$\begin{aligned}P(X=-5) &= P(U=1, D=6)\\ &= P(U=1)\,P(D=6) && \text{(car U et P sont indépendantes)}\\ &= \frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\\ &= \frac{1}{36}\\ P(X=-4) &= P(U=1,D=5)+P(U=2,D=6) && \text{(car } (X=-4)=(U=1,D=5)+P(U=2,D=6))\\ &= P(U=1)\,P(D=5)+P(U=2)\,P(D=6) && \text{(car U et P sont indépendantes)}\\ &= \frac{2}{36},\end{aligned}$$

et ainsi de suite. On obtient *in fine* la loi suivante.

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Déjà, la variable aléatoire $|X|$ prend ses valeurs dans $[\![0,5]\!]$.

Pour $k=0$, on a l'égalité d'événements $(X=0)=(|X|=0)$, donc $P(|X|=0)=P(X=0)=\dfrac{6}{36}$.

En outre, pour $k>0$, on a l'égalité d'événements $(|X|=k)=(X=-k)\sqcup(X=-k)$, donc

$$P(|X|=k)=P(X=k)+P(X=-k).$$

On obtient ainsi la loi suivante (on a simplifié tous les dénominateurs, en gardant 18 pour des comparaisons plus immédiates).

k	0	1	2	3	4	5
$P(\vert X\vert=k)$	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$

Enfin, la variable aléatoire X^2 prend ses valeurs dans $\{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$. Pour tout $k \in [\![0, 5]\!]$, on a l'égalité d'événements $(X^2 = k^2) = (|X| = k)$, donc on obtient directement la loi suivante.

q	0	1	4	9	16	25
$P(X^2 = q)$	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{1}{18}$

Autocorrection G.

Notons B l'événement « on tire le jeu de 32 cartes » et A l'événement « on tire l'as de trèfle ».

On considère que l'énoncé donne les probabilités et probabilités conditionnelles suivantes :

$$P(B) = \frac{1}{4}, \quad P(A|B) = \frac{1}{32} \quad \text{et} \quad P(A|\overline{B}) = \frac{1}{52},$$

et qu'il nous demande de calculer $P(A)$ et $P(B|A)$.

1. On a, d'après la formule des probabilités totales et parce que $(B, \overline{B})$ est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B}) \\ &= \frac{1}{32} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{52} \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{37}{1664}. \end{aligned}$$

2. En redémontrant au passage la formule de Bayes, on a

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A|B)\,P(B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{1}{32} \times \frac{1}{4}}{\frac{37}{1664}} \\ &= \frac{13}{37}. \end{aligned}$$