Probabilités I

Espaces probabilisés finis

Autocorrection A.
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Montrer $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Autocorrection B.
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que

$$P(A) = \frac{7}{10}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cup B) = \frac{9}{10}.$$

Calculer $P((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$.

Autocorrection C.
Déterminer une mesure de probabilité sur $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ telle que la probabilité du singleton $\{k\}$ soit proportionnelle à k.

Exercice 1.
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux événements. Montrer

$$P(A \cup B) + P(A \cup \overline{B}) + P(\overline{A} \cup B) + P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 3.$$

Exercice 2.
À quelles conditions sur x et $y \in \mathbb{R}$ existe-t-il une mesure de probabilité P sur $\{1, 2, 3\}$ telle que $P(\{1, 2\}) = x$ et $P(\{2, 3\}) = y$?

Exercice 3.
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux événements de probabilités p et q. Quelles sont les probabilités possibles pour $A \cap B$?

Exercice 4^{++}.
Soit, dans un espace probabilisé fini (Ω, P), $A_1, \dots, A_n$ des événements. On définit, pour tout indice $k \in [\![1, n]\!]$, $C_k = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ appartient à au moins } k \text{ des événements } A_1, \dots, A_n\}$.

Montrer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} P(C_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n} P(A_k)$.

Autour de l'inclusion-exclusion

Exercice 5 (Inégalité de Boole).
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ des événements. Montrer que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Exercice 6$^+$.

Dans tout l'exercice, (Ω, P) est un espace probabilisé fini et $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont des événements.

1. **(Deuxième) inégalité de Bonferroni.**
   (a) Soit $\omega \in \Omega$. Montrer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}(\omega) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbb{1}_{A_i \cap A_j}(\omega) \leqslant \mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}(\omega)$.
   (b) En déduire $\displaystyle P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i \cap A_j)$.
2. **Inégalité de Kounias.** En imitant la méthode précédente, montrer que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ i \neq j}} P(A_i \cap A_j).$$

Variables aléatoires

Exercice 7.

Soit $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n$ une suite croissante d'événements telle que $\forall i \in [\![0, n]\!], P(A_i) = \dfrac{i}{n}$.

On note N la variable aléatoire de comptage associée à cette suite, c'est-à-dire l'application

$$N : \begin{cases} \Omega \to & \mathbb{N} \\ \omega \mapsto & |\{i \in [\![1, n]\!] \mid \omega \in A_i\}| \,. \end{cases}$$

Donner sa loi.

Probabilités conditionnelles

Exercice 8.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $P(A) > 0$. Montrer que

$$P(A \cap B | A \cup B) \leqslant P(A \cap B | A).$$

Exercice 9$^+$ (Paradoxe de Simpson).

Dans un espace probabilisé fini, deux événements A et B sont dits *(strictement) positivement corrélés* si

$$P(A \cap B) > P(A)\, P(B).$$

1. Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$, avec $P(C) > 0$.
   Traduire sans probabilité conditionnelle le fait que A et B soient positivement corrélés pour la mesure de probabilité $P_C = P(\cdot|C)$.
   On dira alors que A et B sont *positivement corrélés sachant* C.
2. Construire un espace probabilisé fini (Ω, P) et trois événements $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que
   - Ni C ni $\overline{C}$ n'est négligeable.
   - Les événements A et B soient positivement corrélés.
   - Les événements A et B soient négativement corrélés sachant C.
   - Les événements A et B soient négativement corrélés sachant $\overline{C}$.

Indépendance

Exercice 10.
On lance n fois une pièce équilibrée. On note A_0 l'événement « le nombre total de *pile* est pair » et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, A_k l'événement « le k-ième lancer tombe sur *pile* ».

Montrer que la famille d'événements $(A_k)_{k=0}^{n}$ n'est pas constituée d'événements mutuellement indépendants, mais que chacune de ses sous-familles strictes l'est.

Exercice 11.
Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux événements.

Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) \times P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A} \cap B) \times P(A \cap \overline{B}).$$

Exercice 12 (Loi du 0-1). ☑

1. Soit $A \subseteq B$ deux événements indépendants. Montrer que $P(A) = 0$ ou $P(B) = 1$.
2. Déterminer les événements indépendants d'eux-mêmes.

Exercice 13.
Soit $X, Y : \Omega \to [\![1, n]\!]$ deux variables aléatoires. On suppose que $\forall j \in [\![1, n]\!], P(Y = j) > 0$.

Soit $A = \big(P(X = i, Y = j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$.

Montrer que la matrice A est de rang 1 si et seulement si X et Y sont indépendantes.

Exercice 14.
On considère l'ensemble $\Omega_n = [\![1, n]\!]$, muni de la probabilité uniforme.

À quelle condition sur n peut-on trouver deux événements indépendants de probabilité non triviale (c'est-à-dire dans $]0, 1[$) ?

Exercice 15.
Soit (Ω, P) un espace probabilité fini. Montrer qu'il n'existe pas d'événements $A_1, \dots, A_n$ indépendants, de réunion Ω et de même probabilité $p < 1$.

Exercice 16.
Soit $A_1, \dots, A_n \subseteq \Omega$ des événements mutuellement indépendants de probabilité appartenant à $]0, 1[$.

Montrer que $|\Omega| \geqslant 2^n$.

Dénombrement déguisé

Autocorrection D. ☑
On lance trois fois de suite un dé équilibré à 6 faces. Déterminer la probabilité d'obtenir :

(i) au moins un six ;
(ii) exactement un six ;
(iii) au moins une paire ;
(iv) au moins une paire et une somme des résultats paire.

Exercice 17.

On pioche quatre cartes dans un jeu de 52 cartes. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux trèfles et deux piques dans le cas :

(i) d'un tirage simultané ;

(ii) d'un tirage successif sans remise ;

(iii) d'un tirage successif avec remise.

Exercice 18$^+$.

Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. Tous les jours, on tire aléatoirement deux boules de l'urne, jusqu'à épuisement.

1. Quelle est la probabilité pour qu'on ait vu tous les jours un tirage bicolore ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'on ait vu tous les jours un tirage unicolore ?

Exercice 19.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On joue à pile ou face $2n+1$ fois.

1. Calculer la probabilité que l'on ait obtenu *in fine* strictement plus de « pile » que de « face ».
2. Soit $k \in [\![1, 2n+1]\!]$.
   Calculer la probabilité que l'on obtienne « pile » pour la $(n+1)$-ième fois au k-ième lancer.
3. Montrer la formule $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+1} 2^{-k}\binom{k-1}{n} = \frac{1}{2}$.

Exercice 20$^+$.

Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On tire successivement toutes les boules, sans remise et on note N le numéro du tirage au cours duquel la première boule rouge est tirée. Déterminer la loi de N.

Exercice 21$^+$.

On mélange un jeu de 52 cartes.

1. Quelle est la probabilité que deux cartes noires ou deux cartes rouges se retrouvent côte à côte ?
2. Quelle est la probabilité que deux rois se retrouvent côte à côte ?

Exercice 22 (Paradoxe des anniversaires).

Dans une classe de 30 étudiants, nés lors d'une année non bissextile, quelle est la probabilité que deux étudiants au moins aient la même date d'anniversaire ?

Variables de Bernoulli, variables binomiales et vaiid

Exercice 23.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $Z_1, Z_2 \sim \mathcal{B}(n, 1/2)$ deux variables aléatoires indépendantes. Calculer $P(Z_1 = Z_2)$.

Exercice 24.

Soit X_1 et X_2 deux variables de Bernoulli indépendantes de paramètres respectifs p_1 et p_2.

Montrer que les variables aléatoires X_1^2, $1 - X_1$ et $X_1 X_2$ suivent des lois de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

Exercice 25.

On lance un dé n fois de suite et l'on note $X_1, \dots, X_n$ les variables aléatoires donnant les différents résultats.

1. Calculer $P(X_1 \cdots X_n \text{ pair})$.
2. Calculer $P(X_1 + \cdots + X_n \text{ pair})$.

Exercice 26.

1. On lance deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité d'avoir une paire ?
2. Même question avec deux dés pipés de la même façon. Comparer le résultat avec celui de la question précédente.

Exercice 27.

Soit $T_1, \dots, T_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que $\forall i \in [\![1, n]\!], T_i \sim \mathcal{B}(1/i)$.

On note $N = \min\{k \in [\![1, n]\!] \mid T_k = 0\}$, avec la convention $\min \varnothing = 0$.

Déterminer la loi de N.

Exercice 28$^+$.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Quelle est la valeur de X la plus probable ?

Exercice 29.

Soit $p, q \in [0, 1]$. Déterminer toutes les lois conjointes possibles pour deux variables aléatoires X et Y telles que $X \sim \mathcal{B}(p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(q)$.

Exercice 30.

Soit $p \in]0, 1[$ et un entier $k \in \mathbb{N}$. Pour $n \geqslant 1$, considérons X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Montrer que $n \mapsto P(X_n \geqslant k)$ est croissante.

Exercice 31$^+$ (Singes dactylographes).

On dispose d'un dé, dont les faces sont numérotées de 0 à 9. On le lance n fois.

1. Montrer que la probabilité qu'un six apparaisse au moins une fois tend vers 1 quand n tend vers l'infini.
2. Montrer que la probabilité que deux six apparaissent consécutivement au moins une fois tend vers 1 quand n tend vers l'infini.
3. Expliquer le titre de l'exercice.

Objets mathématiques aléatoires

Exercice 32.

On tire au sort (indépendamment et de façon équiprobable) quatre entiers $a, b, c, d \in [\![-n, n]\!]$.

On note $p(n)$ la probabilité que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ soit inversible. Montrer que $p(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

Exercice 33.

Soit $A, B \sim \mathcal{U}(\mathcal{P}([\![1,n]\!]))$ indépendantes. Calculer les probabilités

(i) $P(A \subseteq B)$; (ii) $P(A \cap B = \varnothing)$; (iii) $P(|A \cap B| = 1)$.

Exercice 34⁺.

Soit $X_1, \dots, X_r : \Omega \to \mathcal{P}([\![1,n]\!])$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme.

Déterminer la loi du cardinal $|X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_r|$.

Divers *word problems*

Autocorrection E.

A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. En fonction de p, quel avion choisissez-vous ?

Autocorrection F.

Un joueur lance successivement deux fois un dé équilibré. Soit X la variable aléatoire égale à la différence entre les résultats du premier et du deuxième lancer.

Déterminer les lois de X, $|X|$ et X^2.

Exercice 35.

Lassés du pile ou face classique, Alice et Bob cherchent à en créer une variante. Alice propose la procédure suivante à Bob : elle jettera la pièce 11 fois et Bob 10 fois et le joueur obtenant le plus de pile gagnera. Pour compenser son lancer supplémentaire, Alice perdra en cas d'égalité.

Bob doit-il accepter cette procédure ?

Exercice 36.

On lance un dé pipé et on note X son résultat. On suppose que les faces paires ont toutes la même probabilité, les faces impaires également, mais qu'une face paire a deux fois plus de chance d'apparaître qu'une face impaire.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer $P(X \text{ pair})$ et $P(X \geqslant 3)$.

Exercice 37 (Loi de succession de Laplace).

Soit $n, r \in \mathbb{N}$. On se donne $r+1$ urnes, numérotés de 0 à r. L'urne numérotée k contient k boules rouges et $r-k$ boules blanches. On choisit une urne au hasard, puis on tire avec remise des boules dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité que la $(n+1)$-ième boule tirée soit rouge, sachant que les n précédentes l'étaient ?
2. Que devient cette probabilité quand r tend vers $+\infty$?

Exercice 38 (Problème des boîtes d'allumettes de Banach).

Stefan Banach possède deux boîtes de n allumettes, une dans chaque poche. À chaque fois qu'il allume une cigarette, il choisit une de ses poches au hasard, et prélève une allumette dans la boîte correspondante.

À un moment, en allant prélever une allumette, il constatera que l'une de ses boîtes d'allumettes est vide (cela ne se passe pas au moment où il prélève la dernière, mais au moment où il échoue à prélever « l'après-dernière »).

On note X le nombre d'allumettes qu'il lui reste, dans l'autre poche, à ce moment-là. Déterminer la loi de X.

Exercice 39$^+$.

Les passagers d'un avion entrent successivement (dans l'ordre) dans l'avion et sont censés s'asseoir à leur place respective. Malheureusement, le premier passager ignore les consignes et s'assied au hasard. Ensuite, les passagers s'asseyent tous à leur place, sauf si celle-ci est déjà occupée. Dans ce cas, il s'assoit aléatoirement sur une des places restantes. Quelle est la probabilité que le dernier passager soit assis à sa place ?

Probabilités conditionnelles

Autocorrection G. ☑

On dispose d'un jeu de 32 cartes et de trois jeux de 52 cartes. On tire au sort l'un des quatre jeux, puis une carte dans ce jeu.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir l'as de trèfle ?
2. Si l'on tire un as de trèfle, quelle est la probabilité qu'il provienne du jeu de 32 cartes ?

Exercice 40.

1. Un jeu de cartes contient les deux rois rouges et les deux dames rouges. On tire successivement de ce jeu deux cartes (sans remise).
   (a) Proposer un espace probabilisé fini rendant compte de cette expérience.
   (b) Interpréter les questions suivantes comme des calculs de probabilités conditionnelles (on définira précisément les événements), et les résoudre.
      i. On suppose qu'une de nos deux cartes est une dame. Quelle est la probabilité que l'on ait également tiré l'autre ?
      ii. On suppose qu'une de nos deux cartes est la dame de cœur. Quelle est la probabilité que l'on ait également tiré l'autre ?
2. En proposant un espace probabilisé fini raisonnable rendant compte de « l'expérience », résolvez la question classique suivante (on pourra faire toutes sortes d'hypothèses simplificatrices, mais il s'agira d'en être conscient).

   > Vous savez qu'une de vos relations a deux enfants, tout en ignorant leur sexe. Vous le croisez dans la rue accompagné d'un garçon, qu'il vous présente comme son fils. Quelle est la probabilité que son autre enfant soit une fille ?

Exercice 41. ☑

Des individus $A_0, A_1, \dots, A_n$ se transmettent un nombre égal à 0 ou 1. Chaque individu A_k transmet le nombre reçu à A_{k+1}, de façon fidèle avec une probabilité p et en changeant le message avec une probabilité $1-p$. Tous les individus se comportent de manière indépendante. Calculer la probabilité p_n pour que le nombre reçu par A_n soit le nombre « initial » donné par A_0.

Quelle est la limite de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 42.

Un donjon contient N coffres et un dragon.

Le chef du donjon a mis, avec probabilité p, le trésor dans un des coffres, tiré au sort (et avec probabilité $1-p$, il l'a confié au dragon).

Vous avez ouvert les $N-1$ premiers coffres, sans succès.

Quelle est la probabilité pour que le trésor soit dans le dernier coffre ?

Mélange

Exercice 43^{++}. *ÉNS*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on fixe une variable aléatoire $X_n \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ et on note p_n la probabilité que le premier chiffre après la virgule de $\sqrt{X_n}$ soit 1.

Déterminer la nature et l'éventuelle limite de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 44^{+}.

Un *tournoi* de taille n est la donnée de n équipes numérotées de 1 à n et, pour chaque paire $\{i, j\}$ avec $i \neq j$, d'un résultat appartenant à la paire $\{i \to j, j \to i\}$ (où $i \to j$ se lit « la i-ème équipe a battu la j-ième »). En d'autres termes, un tournoi est une orientation du graphe complet K_n.

1. L'entier n étant fixé, on définit un tournoi aléatoire où, pour chaque paire $i \neq j$, on décide l'issue du match ayant opposé les équipes i et j aléatoirement et équitablement, indépendamment des autres matchs.
   (a) Quelle est la probabilité qu'une équipe ait battu toutes les autres ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'on puisse classer les n équipes de telle sorte que chaque équipe ait battu toutes celles qui sont moins bien classées ?
   (c) Étant donné k équipes, quelle est la probabilité qu'une autre équipe les ait toutes battues ?
2. Un tournoi est dit k-*indécis* si, étant donné k équipes, on peut toujours trouver une équipe les ayant toutes battues. Montrer que la probabilité $P(n, k)$ qu'un tournoi aléatoire de taille n soit k-indécis tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$ (*théorème d'Erdős*, 1963).
3. On dit qu'une équipe i *a presque tout gagné* si pour toute autre équipe j alors $i \to j$ ou il existe k telle que $i \to k \to j$. On définit pareillement la notion d'*avoir presque tout perdu*. Montrer que la probabilité $P(n)$ que toute équipe d'un tournoi de taille n ait à la fois presque tout gagné et presque tout perdu tend vers 1 quand $n \to +\infty$ (*théorème de Maurer*, 1980).
4. Montrer que dans tout tournoi, il existe une équipe qui a presque tout gagné (*théorème de Landau*, 1951).