Probabilités II

Exercice 3.

Étant donné un entier $x \in \mathbb{Z}$, on pourra commencer par trouver une relation entre x, $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ et $(-1)^x$.

Exercice 5.

En remplaçant E[N] par sa définition, il s'agit de montrer $\sum_{k=1}^{n} k\,P(N=k) = \sum_{k=1}^{n} P(N \geqslant k)$.

Dans le sens direct, on peut le faire *via* une transformation d'Abel, à partir de la relation (obtenue par additivité) $P(N=k) = P(N \geqslant k) - P(N \geqslant k+1)$. On peut également le faire dans le sens réciproque, en remplaçant $P(N \geqslant k)$ par une somme et en manipulant la somme triangulaire ainsi créée.

Exercice 9.

Pour l'espérance, un résultat du cours conclut directement. Pour la variance, on reviendra à la formule de König-Huygens.

Exercice 10.

On pourra utiliser habilement la positivité de l'espérance.

Exercice 13.

Pour l'espérance, le calcul de $E(2n - X)$ est techniquement plus facile. Pour la variance, on pourra remarquer que celle de X est égale à celle de $Y = 2n - X$, que l'on peut calculer à l'aide de $E\big(Y(Y+1)\big)$.

Exercice 19.

On pourra procéder par récurrence, et utiliser la formule des espérances totales.

L'inégalité élémentaire constituant le cas $n = 1$ pourra être utile dans la phase d'hérédité.

Exercice 20.

On pourra généraliser n'importe laquelle des preuves déjà vues, par exemple celle (de Schwarz) consistant à remarquer que la fonction polynomiale $\lambda \mapsto E\left[(X+\lambda Y)^2\right]$ est toujours positive, donc que son discriminant est $\leqslant 0$.

Exercice 34.

La méthode la plus élégante, algébrique, est de remarquer que les égalités $\forall k \in \mathbb{N}, E[X^k] = E[Y^k]$ permettent d'obtenir $\forall P \in \mathbb{R}[X], E\big[L(X)\big] = E\big[L(Y)\big]$.

Pour tout $z \in \mathbb{R}$, il est alors possible de trouver un polynôme L tel que $E\big[L(X)\big] = P(X = z)$ et $E\big[L(Y)\big] = P(Y = z)$, en utilisant le fait que $\mathrm{im}(X)$ et $\mathrm{im}(Y)$ sont des ensembles finis.

Autocorrection

Autocorrection A.

On utilise à chaque fois la formule du transfert.

- On a $E\left((X-1)^2\right) = \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 \, P(X=k) = \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell^2 = \frac{(n-1)(2n-1)}{6}$.
- On a $E\left(e^X\right) = \sum_{k=1}^{n} e^k \, P(X=k) = \frac{e}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} e^\ell = \frac{e}{n} \frac{e^n-1}{e-1}$.

Autocorrection B.

1. L'énoncé nous apprend qu'il existe une constante de proportionnalité c telle que l'on ait la relation $\forall k \in [\![1,6]\!], P(X=k) = ck$.

   On doit donc avoir $1 = \sum_{k=1}^{6} P(X=k) = c \sum_{k=1}^{6} k = 21c$, donc $c = \frac{1}{21}$.

   La loi de X est donc donnée par la formule $\forall k \in [\![1,6]\!], P(X=k) = \frac{k}{21}$.

   On peut alors calculer l'espérance : $E[X] = \sum_{k=1}^{6} k \, P(X=k) = \frac{1}{21} \sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{91}{21}$.
2. La loi de Y est donnée par la formule $\forall k \in [\![1,6]\!], P\left(Y = \frac{1}{k}\right) = P(X=k) = \frac{k}{21}$.

   Par la formule du transfert, $E[Y] = E\left[\frac{1}{X}\right] = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k} P(X=k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{21} = \frac{2}{7}$.

Autocorrection C.

1. On a d'après la formule du transfert :

$$
\begin{aligned}
& E[X^2] = \sum_{k=1}^{n} k^2 \, P(X=k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \\
\text{donc} \quad & V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}.
\end{aligned}
$$

2. Si $Y \sim \mathcal{U}([\![a,b]\!])$, on a $Z = Y - (a-1) \sim \mathcal{U}([\![1, b-a+1]\!])$ donc, d'après les propriétés de la variance et la question précédente, $E[Y] = E[Z] = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$.