Probabilités II

Espérance

Autocorrection A.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Calculer $E\left((X-1)^2\right)$ et $E\left(e^X\right)$.

Autocorrection B.

On considère un dé pipé à 6 faces, de telle sorte que la probabilité d'obtenir la face numérotée k est proportionnelle à k. On note X la valeur de la face obtenue.

1. Déterminer la loi de X, calculer son espérance. Comparer avec un dé non pipé.
2. On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y, puis son espérance.

Exercice 1.

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Calculer l'espérance de la variable $Y = \dfrac{1}{X+1}$.

Exercice 2.

1. Soit X et Y indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Calculer $E\big(|X-Y|\big)$.
2. Même question avec la loi uniforme $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

Exercice 3.

Soit $p \in \,]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une variable binomiale $X \sim \mathcal{B}(2n, p)$ et on définit $Y = \lfloor X/2 \rfloor$.

1. Calculer $E\left[(-1)^X\right]$.
2. Par linéarité de l'espérance, en déduire $E(Y)$.

Exercice 4^+.

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires strictement positives, indépendantes et de même loi.

1. On note $Z = (X_1, \dots, X_j, \dots, X_n)$ et, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on note $Z_j = (X_j, \dots, X_1, \dots, X_n)$ le n-uplet obtenu en échangeant les première et j-ième coordonnées. Montrer $\forall j \in [\![1, n]\!], Z \sim Z_j$. (On dit que les variables $X_1, \dots, X_n$ sont *échangeables*.)
2. En déduire que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{X_1}{X_1 + \dots + X_n} \sim \dfrac{X_j}{X_1 + \dots + X_n}$.
3. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, calculer l'espérance $E\left[\dfrac{X_1 + \dots + X_k}{X_1 + \dots + X_n}\right]$.

Exercice 5 (Presque du cours).

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Montrer $E[N] = \sum_{k=1}^{n} P(N \geqslant k)$.

Exercice 6 (Inégalité de Jensen).

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et X une variable aléatoire à valeurs dans I.
   Montrer $E[f(X)] \geqslant f\big(E[X]\big)$.
2. Soit X une variable aléatoire réelle. Donner deux démonstrations de $E[X^2] \geqslant E[X]^2$.

Exercice 7$^+$ (Normes L^p).
Étant donné une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ définie sur un espace probabilisé fini et $p \in [1, +\infty[$, on définit sa *norme* L^p :

$$\|X\|_p = E\left[|X|^p\right]^{1/p}.$$

1. En utilisant l'inégalité de Jensen, montrer que la fonction $p \mapsto \|X\|_p$ est croissante.
2. Déterminer $\lim\limits_{p \to +\infty} \|X\|_p$.

Exercice 8 (Espérance conditionnelle).
Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. Pour tout événement non négligeable $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on définit *l'espérance conditionnelle de* X *sachant* A comme l'espérance de la variable aléatoire X, sur espace probabilisé fini (Ω, P_A), c'est-à-dire $E[X|A] = \sum\limits_{k \in \operatorname{im} X} k\, P(X = k|A)$.

1. Calculer $E[X|A]$ dans le cas où les variables aléatoires X et $\mathbb{1}_A$ sont indépendantes.
2. On suppose que deux variables aléatoires réelles X et Y coïncident sur un événement A.
   Montrer $E[X|A] = E[Y|A]$.
3. Soit $(A_1, \ldots, A_p)$ un système complet d'événements non négligeables.
   Montrer la *formule des espérances totales* : $E(X) = \sum\limits_{i=1}^{p} E[X|A_i]\, P(A_i)$.
4. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathcal{B}(p)$ et $N : \Omega \to [\![1, n]\!]$ des variables aléatoires indépendantes.
   Calculer l'espérance de la somme $S = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$.

Moments d'ordre deux

Autocorrection C. ☑
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \leqslant b \in \mathbb{Z}$.

1. Calculer la variance d'une variable aléatoire $X \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.
2. Sans calcul supplémentaire, calculer la variance d'une variable aléatoire $Y \sim \mathcal{U}([\![a, b]\!])$.

Exercice 9. 💡☑
Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, d'espérance μ et de variance 1.

Calculer l'espérance et la variance de $Y = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Exercice 10. 💡
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans le segment $[a, b]$.

1. **Inégalité de Bhatia-Davis.** On note $m = E[X]$. Montrer $V(X) \leqslant (b - m)(m - a)$.
2. **Inégalité de Popoviciu.** En déduire $V(X) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

Exercice 11.

Soit $n \geqslant 2$ et $X, Y \sim \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ indépendantes. On pose $N = \min(X, Y)$ et $M = \max(X, Y)$.

1. Calculer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(M \leqslant k)$.
2. En déduire la loi de M et son espérance.
3. En utilisant la linéarité de l'espérance, calculer $E(N)$.
4. Retrouver $E(N)$ en utilisant la formule $E(N) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(N \geqslant k)$.
5. Calculer $V(M)$.

Exercice 12 (Problème du char d'assaut allemand).

Soit $r \leqslant n$ deux entiers non nuls, et $Y \sim \mathcal{U}\left(\mathcal{P}_r([\![1, n]\!])\right)$. On définit $X = \max Y$. (Version *word problem* : on tire au hasard r jetons dans une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n, et on note X le numéro maximal des jetons tirés).

1. Déterminer la loi de X. Quelle identité combinatoire obtient-on ?
2. Calculer l'espérance $E(X)$.
3. Calculer la variance $V(X)$.

Exercice 13$^+$.

On tire sans remise dans une urne contenant n boules rouges et n boules noires, jusqu'à avoir tiré toutes les boules rouges. On note X le nombre de boules noires restant dans l'urne à ce moment-là.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance de X.
3. Calculer sa variance.

Exercice 14.

On tire au hasard un entier X entre 1 et n, puis de nouveau au hasard un entier Y entre 1 et X.

1. **Analyse de l'énoncé.** Interpréter l'énoncé comme vous donnant la loi de X et la loi conditionnelle de Y sachant $(X = k)$, pour tout k.
2. Calculer la loi de Y, son espérance et sa variance.

Covariance

Exercice 15.

Soit $n \geqslant 2$ et $p, q \in [0, 1]$ tels que $p + q = 1$.

On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires de loi conjointe

$$\forall j \in [\![0, n]\!], \forall k \in [\![1, n]\!], P(X = j, Y = k) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } k = j \text{ et } j \neq 0 \\ \dfrac{q^n}{n} & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Donner les lois marginales du couple, et les espérances de X et Y.
2. (a) Soit $j \in [\![0, n]\!]$. Donner la loi de Y sachant $(X = j)$.
   (b) Calculer l'espérance correspondante.
3. (a) Montrer que pour tout $q \in \,]0, 1[\,$, $P(X = 1, Y = 1) \neq P(X = 1)P(Y = 1)$.
   (b) Calculer la covariance de X et Y et montrer qu'elle s'annule pour une valeur de q.
   (c) Qu'en déduire ?

Exercice 16.

Soit X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p \in]0,1[$ sur le même espace probabilisé. Soit $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Déterminer :

(i) la loi du couple (U, V) ;

(ii) la covariance de U et V ;

(iii) si U et V sont indépendantes.

Exercice 17.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$.

On définit $Z = X - Y$.

1. Calculer l'espérance et la variance de Z.
2. Déterminer la loi de Z.
3. Les variables X et Z sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathrm{cov}(X, Z)$.

Exercice 18.

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles de carrés intégrables, avec $V(X) > 0$. Déterminer a et b réels minimisant la quantité $E\left[(Y - (aX + b))^2\right]$.

Exercice 19^{++} (Inégalité de Fortuin, Kasteleyn et Ginibre).

Soit n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes $T_1, \ldots, T_n$. On appelle *variable aléatoire croissante* toute variable aléatoire $X = f(T_1, \ldots, T_n)$, avec $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ croissante (pour l'ordre produit).

Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires croissantes, alors $\mathrm{cov}(X, Y) \geqslant 0$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 20 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé fini.

1. Montrer $\left|E[XY]\right| \leqslant \sqrt{E[X^2]}\sqrt{E[Y^2]}$.
2. En déduire $\left|\mathrm{cov}(X, Y)\right| \leqslant \sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}$.

Exercice 21.

Montrer que, pour toute variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $E(X) \leqslant E(|X|) \leqslant \sqrt{E(X^2)}$.

Exercice 22.

Soit X et Y deux variables aléatoires iid à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer $\mathbb{E}\left(\dfrac{X}{Y}\right) \geqslant 1$.

Exercice 23^{+}.

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé.

Montrer que $|P(A \cap B) - P(A)\,P(B)| \leqslant 1/4$ et caractériser le cas d'égalité.

Méthode des indicatrices

Exercice 24.

Soit $n \geqslant 2$ et $r \in [\![2, 2n]\!]$ deux entiers.

Sur l'arche d'Utnapishtim sont présents $2n$ animaux, deux pour chacune des n espèces représentées.

Pour visiter une île, il choisit (aléatoirement, uniformément) r animaux parmi les $2n$.

On note N le nombre d'espèces dont les deux représentants sont choisis parmi les r. Calculer $E(N)$.

Exercice 25.

On considère r boules numérotées de 1 à r et n tiroirs numérotés de 1 à n. On place au hasard chacune des r boules dans l'un des n tiroirs. On note T le nombre de boules placées dans le tiroir 1 et V le nombre de tiroirs restés vides.

Déterminer l'espérance de ces deux variables aléatoires.

Exercice 26$^+$.

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, r]\!]$. On note N le nombre de « montées » de la liste $(X_1, \dots, X_n)$, c'est-à-dire $N = \left|\left\{i \in [\![1, n-1]\!] \,\middle|\, X_{i+1} \geqslant X_i\right\}\right|$.

Calculer l'espérance de N.

Exercice 27. ☑

Soit $n \geqslant 2$. On considère un ensemble aléatoire $E \sim \mathcal{U}(\mathcal{P}([\![1, n]\!]))$.

On définit, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'événement $A_i = (i \in E)$.

1. Déterminer la loi des indicatrices $\mathbb{1}_{A_i}$ et montrer qu'elles sont indépendantes.
2. On définit la variable aléatoire $N = |E|$.
   Exprimer N en fonction des indicatrices $\mathbb{1}_{A_i}$ et en déduire sa loi, son espérance et sa variance.
3. On définit la variable aléatoire $T = \displaystyle\sum_{i \in E} i$.
   Exprimer T en fonction des indicatrices $\mathbb{1}_{A_i}$ et en déduire son espérance et sa variance.

Exercice 28 (Loi hypergéométrique). ☑

Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire simultanément n boules dans celle-ci et on note N le nombre de boules noires obtenues.

1. Déterminer la loi de N.
2. Calculer l'espérance de N.
3. Calculer l'espérance de $N(N-1)$, puis la variance de N.
4. Reprendre le calcul de $E[N]$ et $V(N)$ par la méthode des indicatrices, en introduisant des événements A_i : « la i-ème boule noire a été tirée ».

Exercice 29.

Une urne contient $2n$ boules. Parmi ces boules, n portent le numéro 0 et les n autres portent les numéros de 1 à n. On tire n boules de l'urne. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si la boule portant le numéro i a été tirée, à 0 sinon.

1. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, déterminer la loi de X_i.
2. Pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, déterminer la covariance $\operatorname{cov}(X_i, X_j)$.
3. Soit S la somme des numéros tirés. Déterminer l'espérance et la variance de S.

Exercice 30 (Nombre de points fixes d'une permutation aléatoire).

Dans un groupe de $n \geqslant 2$ personnes, chacun laisse son parapluie à l'accueil d'un restaurant. En partant, chacun reprend un parapluie au hasard. On note X le nombre de personnes ayant repris le bon parapluie.

Calculer l'espérance et la variance de X.

Inégalités de concentration

Exercice 31.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne $X_n \sim \mathcal{B}(4n, 1/2)$.

1. Calculer la variance de X_n.
2. Montrer que la suite $(P(|X_n - 2n| \geqslant n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
3. Montrer que la suite $(P(|X_n - 2n| \leqslant n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{3n} \binom{4n}{k}$. Déterminer un équivalent simple de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 32$^+$ (Inégalité de Hoeffding).

1. Soit S_n une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n, p)$. Montrer que pour tout $a > 0$,
$$\forall s \in \mathbb{R}, P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant a\right) \leqslant e^{-nsa}\left(1 - p + pe^s\right)^n.$$
2. Parmi les majorations de la question précédente, identifier la plus précise.
3. Si $0 < q < p < 1$, on définit la *divergence de Kullback–Leibler*
$$D(p\|q) = (1-p)\ln\left(\frac{1-p}{1-q}\right) + p\ln\left(\frac{p}{q}\right).$$
Exprimer $D(p\|q)$ comme une intégrale et en déduire que $D(p\|q) \geqslant 2(p-q)^2$.
4. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2e^{-2n\varepsilon^2}$.

Mélange

Exercice 33.

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi. On suppose par ailleurs $X_1 + X_2 \sim 2X_1$.

Montrer que X_1 est *constante presque sûrement*, c'est-à-dire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que $P(X_1 = c) = 1$.

Exercice 34$^+$.

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles. On suppose $\forall k \in \mathbb{N}, E(X^k) = E(Y^k)$. Montrer $X \sim Y$.

Exercice 35 (Fonctions génératrices).
Si Z est une variable aléatoire à valeurs entières, on définit le polynôme

$$g_Z = E(X^Z) = \sum_{k \in Z(\Omega)} P(Z = k)\, X^k \in \mathbb{R}[X],$$

et on l'appelle *fonction génératrice de* Z.

1. Montrer que la loi de Z est entièrement déterminée par g_Z.
2. Montrer que, si Z_1 et Z_2 sont indépendantes, alors $g_{Z_1+Z_2} = g_{Z_1} g_{Z_2}$.

$$g_{Z_1+Z_2} = g_{Z_1} g_{Z_2}.$$

3. Soit $Z \sim \mathcal{B}(n, p)$. Déterminer g_Z.
4. Retrouver grâce aux questions précédentes la loi de la somme $Z_1 + Z_2$, quand Z_1 et Z_2 sont des variables aléatoires indépendantes telles que $Z_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Z_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$.
5. On lance deux à six faces éventuellement pipés. On note Z_1 et Z_2, respectivement, le résultat de ces deux lancers, et $T = Z_1 + Z_2$ le total des points obtenus.
   (a) Montrer que T ne suit pas la loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.
   (b) On suppose que T suit la même loi que dans le cas où les dés sont équilibrés. Montrer qu'ils le sont.