
Espaces euclidiens

Généralités

Exemples d'espaces préhilbertiens

Autocorrection A. ✓

Montrer que l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle : (P, Q) \mapsto \langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 1.

Soit $D \in D_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale.

À quelle condition la formule $\langle X | Y \rangle = X^T D Y$ définit-elle un produit scalaire sur \mathbb{R}^n ?

Exercice 2.

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'espace E , muni de $\langle \cdot | \cdot \rangle$, est un espace préhilbertien.

(i) $E = C^1([-1, 1])$, $\langle \cdot | \cdot \rangle : (f, g) \mapsto \langle f | g \rangle = f(0) g(0) + \int_{-1}^1 f'(t) g'(t) dt$;

(ii) $E = \mathbb{R}[X]$, $\langle \cdot | \cdot \rangle : (P, Q) \mapsto \langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(0) Q^{(k)}(0)$;

(iii) $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\langle \cdot | \cdot \rangle : (P, Q) \mapsto \langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a_k) Q^{(k)}(a_k)$, pour $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ quelconques.

Exercice 3. ✓

Montrer que l'application

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow & \mathbb{R} \\ (P, Q) \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} P(n) Q(n) \end{cases}$$

est un produit scalaire bien défini sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4⁺.

Soit $w \in C^0([-1, 1])$. On définit l'application $\langle \cdot | \cdot \rangle_w : (f, g) \mapsto \int_0^1 f(t) g(t) w(t) dt$.

Montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle_w$ est un produit scalaire sur $C^0([0, 1])$ si et seulement si w est à valeurs positives et que l'ensemble de ses zéros ne contient aucun intervalle non trivial.

Exercice 5⁺.

Montrer que la formule $\forall f, g \in C^1([0, 1])$, $\langle f | g \rangle = \int_0^1 f' g' + f(1) g(0) + f(0) g(1)$ définit un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sur $C^1([0, 1])$.

Propriétés des normes dérivant d'un produit scalaire

Exercice 6 (Stricte convexité de la sphère unité).

1. Soit E un espace préhilbertien et $x \neq y \in E$ deux éléments tels que $\|x\| = \|y\| = 1$.
Montrer $\forall t \in]0, 1[, \|(1-t)x + ty\| < 1$.
2. En déduire que la norme uniforme sur $C^0([0, 1])$ ne dérive pas d'un produit scalaire.

Exercice 7 (Identité du parallélogramme).

1. Soit E un espace euclidien et $x, y \in E$. Montrer

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

et interpréter cette égalité géométriquement.

2. En déduire une nouvelle démonstration du fait que la « norme Manhattan » $\|(x, y)\|_M = |x| + |y|$, définie sur \mathbb{R}^2 , ne dérive pas d'un produit scalaire.

Exercice 8.

Soit E un espace préhilbertien, $u_1, \dots, u_n \in E$ et $C \in \mathbb{R}$ tels que $\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$, $\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u_i \right\| \leq C$.

Montrer $\sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 \leq C^2$.

Inégalités (dont Cauchy-Schwarz)

Autocorrection B.

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} \leq 2^{n/2} \sqrt{n+1}$.
2. Montrer que, pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, $|\operatorname{tr} A| \leq \sqrt{n} \|A\|$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $M_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer $\left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \times \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) \geq n^2$.

Exercice 9.

Montrer $\forall A, B \in S_n(\mathbb{R})$, $(\operatorname{tr}(AB + BA))^2 \leq 4 \operatorname{tr}(A^2) \operatorname{tr}(B^2)$.

Exercice 10.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le moment $s_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$ et la matrice $H_n = (s_{i+j})_{0 \leq i, j \leq n} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer $\forall X \in \mathbb{R}^{n+1}$, $X^T H_n X \geq 0$.
2. En déduire $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $s_{p+q}^2 \leq s_{2p} s_{2q}$, puis montrer cette inégalité directement à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Configurations géométriques

Exercice 11. 💡 ✓

Soit $(v_i)_{i=1}^3$ une famille de trois vecteurs unitaires d'un espace euclidien E .

On suppose que quels que soient $i \neq j$, $\langle v_i | v_j \rangle = -\frac{1}{2}$. Montrer que les trois vecteurs sont coplanaires.

Exercice 12⁺ (Simplexe régulier). _____

Soit E un espace euclidien de dimension n . Montrer qu'il existe $x_0, x_1, \dots, x_n \in E$ unitaires tels que $\forall i \neq j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\langle x_i | x_j \rangle = -\frac{1}{n}$.

Exercice 13⁺ (Familles obtusangles). 💡 ✓

Soit E un espace euclidien et (x_1, \dots, x_p) une famille de vecteurs de E telle que $\forall i \neq j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\langle x_i | x_j \rangle < 0$.

Montrer que $p \leq 1 + \dim E$.

Orthogonalité

Exercice 14. _____ ✓

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E . Montrer

$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \quad \text{et} \quad (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

Exercice 15. _____

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace préhilbertien réel E .

On suppose que $F \perp G$. Montrer que $F^\perp = G$.

Exercice 16. _____

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $F, G \subseteq E$ deux sous-espaces vectoriels.

Montrer que F et G sont orthogonaux si et seulement si $\forall u \in F, \forall v \in G, \|u + v\| \geq \|u\|$.

Exercice 17. _____

Soit E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E .

1. En utilisant le théorème de représentation de Riesz, montrer que toute forme linéaire $\alpha : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que F et F^\perp soient inclus dans $\ker(\alpha)$ est nulle.
2. En déduire une nouvelle démonstration du fait que $E = F \oplus F^\perp$.

Exercice 18. _____ ✓

On munit $C^0([0, 1])$ du produit scalaire canonique. On note $e_n : x \mapsto x^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $f \in C^0([0, 1])$ telle que $f \perp e_0$. Montrer que f s'annule au moins une fois dans $]0, 1[$.
2. Soit $f \in C^0([0, 1])$ telle que $f \perp e_0, e_1$. Montrer que f s'annule au moins deux fois dans $]0, 1[$.
3. Généraliser.

Exercice 19⁺.

Dans tout l'exercice, on munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P|Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) dt$.

1. Dans cette question, on fixe $n = 2$.

(a) Donner une base de $\text{Vect}(X, X^2)^\perp$.

(b) Construire $A_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], P(0) = \int_0^1 A_2(t) P(t) dt$.

2. On revient maintenant à $n \in \mathbb{N}$ quelconque.

(a) Montrer qu'il existe un unique $A_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = \int_0^1 A_n(t) P(t) dt$.

(b) Montrer que $\deg A_n = n$.

3. Existe-t-il un polynôme $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X], P(0) = \int_0^1 A(t) P(t) dt$?

Exercice 20⁺ (Polynômes de Legendre).

On munit l'ensemble $C^0([-1, 1])$ du produit scalaire canonique.

1. Montrer que l'équation différentielle $((1-x^2)y')' + n(n+1)y = 0$ possède une unique solution polynomiale P_n unitaire et de degré $\leq n$, et montrer que celle-ci est de degré n exactement.

2. Montrer que la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale. Le réel 1 est-il racine de P_n ?

3. On appelle n -ième *polynôme de Legendre* le polynôme $L_n = \frac{P_n}{P_n(1)}$.

Montrer que L_n est proportionnel à $((1-x^2)^n)^{(n)}$.

Distance, projection**Autocorrection C.**

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E , et p le projecteur orthogonal sur F . Montrer $\forall x \in E, d(x, F)^2 = \langle x|x - p(x) \rangle$.

Autocorrection D.

Calculer les infima suivants, sans utiliser le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

$$(i) \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t - (a\sqrt{t} + b))^2 dt;$$

$$(ii) \inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^3 - (a + bt + ct^2))^2 dt.$$

Exercice 21.

1. Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. À quelle condition l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\mapsto \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k) \end{aligned}$$

définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$?

2. On suppose désormais qu'il s'agit bien d'un produit scalaire. En donner une base orthonormée.

3. Soit $\mathcal{F} = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0 \right\}$. Déterminer la distance de X^n à \mathcal{F} .

Exercice 22.

On munit $M_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique et on note $J_n = (1)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ de trace nulle. Calculer $\inf \left\{ \|M - \alpha I_n - \beta J_n\| \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

Exercice 23.

On munit $E = \mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire $\langle A|B \rangle = \int_0^1 AB$ et on pose $Q = 1 + X + X^2 + X^3 \in E$.

1. Montrer que $F = \left\{ P \in E \mid \int_0^1 (t^3 - t) P'(t) dt = \int_0^1 P \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E .
2. Calculer $d(Q, F)$.

Exercice 24.

1. Montrer que $(f, g) \mapsto \langle f|g \rangle = \int_0^1 (fg + f'g')$ est un produit scalaire sur $C^1([0, 1])$.

2. On pose $F = \left\{ f \in C^2([0, 1]) \mid f'' = f \right\}$. Montrer que

$$F^\perp = \left\{ f \in C^1([0, 1]) \mid f(0) = f(1) = 0 \right\}.$$

3. Déterminer une expression explicite de la projection orthogonale de $C^1([0, 1])$ sur F .

4. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On pose

$$E_{\alpha, \beta} = \left\{ f \in C^1([0, 1]) \mid f(0) = \alpha, f(1) = \beta \right\}.$$

Montrer l'égalité

$$\inf_{f \in E_{\alpha, \beta}} \int_0^1 (f(t)^2 + f'(t)^2) dt = \frac{(\alpha^2 + \beta^2) \operatorname{ch} 1 - 2\alpha\beta}{\operatorname{sh} 1}.$$

Exercice 25.

Soit $f \in C^0([0, 1])$ telle que $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = 1$. Montrer que $\int_0^1 f(x)^2 dx \geq 4$.

Exercice 26.

Soit E un espace préhilbertien et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 27.

Soit E un espace euclidien possédant une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et $p \in \mathcal{L}(E)$ le projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel F de E . Calculer $\sum_{j=1}^n \|p(e_j)\|^2$ en fonction de $\dim F$.

Mélange

Exercice 28⁺ (Deux modes de convergence).

Soit E un espace préhilbertien réel, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E et $\ell \in E$. On dit :

- ▶ que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si $\| \ell - x_n \| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$;
- ▶ que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers ℓ si et seulement si $\forall y \in E, \langle y | \ell - x_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

1. Montrer l'unicité de la limite pour ces deux types de convergence.
2. Montrer que la convergence entraîne la convergence faible.
3. On suppose E euclidien. Montrer que la convergence faible entraîne la convergence.
4. Dans $\ell^2(\mathbb{N})$, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite e_n qui vaut 1 en n -ième position et 0 ailleurs. Montrer que la suite (de suites) $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $0_{\ell^2(\mathbb{N})}$, et en déduire que cette suite ne converge pas.

Exercice 29⁺ (Un (cas particulier d'un) théorème de Grothendieck).

Soit $V \subseteq C^0([0, 1])$ un sous-espace vectoriel et $A > 0$ tels que $\forall f \in V, \|f\|_\infty \leq A \|f\|_2$.

1. Montrer que V est strictement inclus dans $C^0([0, 1])$.
2. Soit (f_1, \dots, f_p) une famille orthonormée de V .

(a) Pour tous $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, majorer $\left\| \sum_{i=1}^n c_i f_i \right\|_\infty$ en fonction de $\sum_{i=1}^n c_i^2$.

(b) En déduire que $\sum_{i=1}^p f_i^2 \leq A^2$.

3. Déduire de la question précédente que V est de dimension finie et que $\dim V \leq A^2$.
4. Montrer que pour tout n , il existe un sous-espace vectoriel $V \subseteq C_{\text{pm}}^0([0, 1])$ de dimension n et tel que $\forall f \in V, \|f\|_\infty \leq \sqrt{n} \|f\|_2$.

Exercice 30⁺⁺.

Soit E un espace euclidien possédant une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) .

1. Montrer que toute famille (f_1, \dots, f_n) de vecteurs de E vérifiant $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|f_k - e_k\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$ est encore une base de E .
2. La propriété reste-t-elle vraie si l'on remplace l'inégalité stricte par une inégalité large ?