

## Déterminants

### Calcul

#### Autocorrection A.



Calculer les déterminants des matrices suivantes, où  $a, b, c, d, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  sont des paramètres.

$$(i) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix};$$

$$(iv) \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 & (d+1)^2 \\ (a+2)^2 & (b+2)^2 & (c+2)^2 & (d+2)^2 \\ (a+3)^2 & (b+3)^2 & (c+3)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix};$$

$$(ii) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix};$$

$$(v) \det \left( \sum_{i=1}^n a_i E_{i,n+1-i} \right);$$

$$(iii) \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix};$$

$$(vi) D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{matrice } n \times n).$$

#### Exercice 1.

Calculer les déterminants  $n \times n$  suivants ( $a, x, y$  et  $z$  désignent des paramètres réels).

$$(i) \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \dots & 0 \\ 0 & -x & 1+x^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 \end{vmatrix};$$

$$(iii) \begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ y & z & 0 & \dots & 0 \\ y & 0 & z & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y & 0 & 0 & \dots & z \end{vmatrix};$$

$$(ii) \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix};$$

$$(iv) \begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \dots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \dots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_n \end{vmatrix}, \text{ où } S_n = \sum_{i=1}^n i.$$

#### Exercice 2.

Calculer les déterminants  $n \times n$  suivants ( $a$  désigne un paramètre réel).

$$(i) \det \left( a^{\max(i,j)} \right)_{1 \leq i, j \leq n};$$

$$(iii) \det \left( \binom{i+j-2}{i-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n};$$

$$(ii) \det \left( \binom{i}{j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n};$$

$$(iv) \det (P(i+j-1))_{1 \leq i, j \leq n}, \text{ où } P \in \mathbb{R}_{n-2}[X].$$

**Exercice 3.**

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $J = (1)_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $J$  est semblable à  $n E_{1,1}$ .

2. En déduire la valeur du déterminant 
$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

**Exercice 4.**

Soit  $a_1, \dots, a_n \in K$ . Calculer le déterminant 
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ & & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ & (a_1) & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_1 \end{vmatrix}.$$

**Exercice 5<sup>+</sup> (Complément de Schur).**

Soit  $A, B, C, D \in M_n(K)$  et  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{2n}(K)$ .

1. On suppose  $A$  inversible. Montrer  $\det(M) = \det(A) \det(D - CA^{-1}B)$ .
2. On suppose en outre que  $A$  et  $C$  commutent. Montrer que  $\det(M) = \det(AD - CB)$ .

**Exercice 6.**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $s \in \mathcal{L}(E)$  une symétrie.

Déterminer  $\det(s)$  en fonction de la dimension de l'espace propre  $E_1(s)$ .

**Déterminants célèbres****Exercice 7<sup>+</sup> (Déterminants circulants).**

Dans tout l'exercice, on fixe  $n \geq 2$  et  $\zeta = \exp\left(i \frac{2\pi}{n}\right)$ .

1. On note  $C = E_{1,n} + \sum_{j=1}^{n-1} E_{j+1,j} \in M_n(\mathbb{C})$ .

Montrer  $C^n = I_n$ .

2. Montrer que pour tout  $\omega \in \mathbb{U}_n$ , l'espace vectoriel  $\{X \in \mathbb{C}^n \mid CX = \omega X\}$  est une droite, et en déduire que  $C$  est semblable à la matrice  $\text{diag}(1, \zeta, \dots, \zeta^{n-1})$ .
3. En déduire que, pour tous  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ , on a

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} \left( a_0 + \zeta^j a_1 + \cdots + \zeta^{j(n-1)} a_{n-1} \right).$$

**Exercice 8<sup>++</sup> (Déterminant de Cauchy).**

Soit  $a_1, \dots, a_n$  et  $b_1, \dots, b_n \in K$  tels que  $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_i + b_j \neq 0$ .

Calculer le déterminant de  $\left( \frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ .

**Exercice 9<sup>+</sup> (Déterminant de Pascal).**

1. Soit  $x_1, \dots, x_n$  des réels et  $(P_0, \dots, P_{n-1})$  une famille échelonnée de polynômes. Calculer le déterminant  $\det (P_{j-1}(x_i))_{1 \leq i, j \leq n}$  en fonction du déterminant de Vandermonde  $V(x_1, \dots, x_n)$ .

2. En déduire

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n}{n-1} \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \dots & \binom{n}{n-2} & \binom{n+1}{n-1} \\ 1 & 4 & 10 & 20 & \dots & \binom{n+1}{n-2} & \binom{n+2}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \binom{n-1}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n+1}{3} & \dots & \binom{2n-4}{n-2} & \binom{2n-3}{n-1} \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n+1}{2} & \binom{n+2}{3} & \dots & \binom{2n-3}{n-2} & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}_{[n]}$$

**Exercice 10.**

1. Soit  $x_1, \dots, x_n$  des réels et  $(P_0, \dots, P_{n-1})$  une famille échelonnée de polynômes. Calculer le déterminant  $\det (P_{j-1}(x_i))_{1 \leq i, j \leq n}$  en fonction du déterminant de Vandermonde  $V(x_1, \dots, x_n)$ .

2. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \theta_1 & \cos 2\theta_1 & \dots & \cos ((n-1)\theta_1) \\ 1 & \cos \theta_2 & \cos 2\theta_2 & \dots & \cos ((n-1)\theta_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \theta_n & \cos 2\theta_n & \dots & \cos ((n-1)\theta_n) \end{vmatrix}.$$

**Exercice 11<sup>++</sup>.**

Soit  $x_1, \dots, x_n \in K$  et  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{k-1} & x_1^{k+1} & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{k-1} & x_2^{k+1} & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{k-1} & x_n^{k+1} & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

**Exercice 12<sup>+</sup> (Déterminants de Gram).**

Étant donné une famille  $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$  dans un espace préhilbertien  $E$ , on définit le *déterminant de Gram* (ou *gramien*)  $G(\mathcal{F}) = \det (\langle x_i | x_j \rangle)_{i=1}^n$ .

1. On suppose  $\mathcal{F}$  liée. Montrer que  $G(\mathcal{F}) = 0$ .

Dans la suite, on suppose la famille  $\mathcal{F}$  libre.

2. Montrer qu'il existe une famille orthonormée  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  telle que  $\text{Vect}(\mathcal{B}) = \text{Vect}(\mathcal{F})$ .
3. Exprimer les coefficients de  $M = {}_{\mathcal{B}}[\mathcal{F}]$  à l'aide de produits scalaires, et en déduire l'égalité  $G(\mathcal{F}) = \det(M^T M)$ .
4. Montrer que  $G(\mathcal{F}) > 0$ .
5. **Application.** Montrer que  $\det \left( \frac{1}{i+j+1} \right)_{0 \leq i, j \leq n} > 0$ .

**Remarque.** *In fine*, on a démontré  $G(\mathcal{F}) \geq 0$ , avec égalité si et seulement si  $\mathcal{F}$  est liée.

**Exercice 13<sup>++</sup>.**

Soit  $E$  un espace euclidien et  $x_1, \dots, x_p \in E$  tels que  $\forall i \neq j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \langle x_i | x_j \rangle = -1$ .



Montrer  $\sum_{i=1}^p \frac{1}{1 + \|x_i\|^2} \leq 1$ . Quels sont les cas d'égalité ?

**Déterminants et polynômes****Exercice 14.**

On considère l'endomorphisme  $\varphi : P \mapsto P(1 - X)$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Calculer  $\text{tr } \varphi$  et  $\det \varphi$ .

**Exercice 15.**

Soit  $E = \{x \mapsto P(x)e^x \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$ . Calculer le déterminant de l'endomorphisme de dérivation sur  $E$ .

**Exercice 16<sup>+</sup>.**

Soit  $n \geq 2$  et  $P = X^n - X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ .

1. Montrer que  $P$  est simplement scindé dans  $\mathbb{C}$ . On note  $z_1, \dots, z_n$  ses racines.
2. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 + z_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 + z_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 + z_n \end{vmatrix}.$$

**Rang et perturbation du déterminant****Exercice 17.**

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ , avec  $B$  de rang 1. Montrer que  $\det((A + B)(A - B)) \leq (\det A)^2$ .

**Exercice 18.**

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que la fonction  $t \mapsto \det(A + tB)$  est polynomiale, de degré  $\leq \text{rg } B$ .
2. Montrer que la fonction  $t \mapsto \det(tI_n - A)$  est polynomiale et déterminer son degré et ses racines.
3. Trouver une suite de matrices inversibles  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A$  (où la convergence signifie que, pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, [A_n]_{i,j} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} [A]_{i,j}$ ).

**Exercice 19<sup>+</sup>.**

1. Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . Étant donné deux matrices  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  à coefficients entiers (ce que l'on notera simplement  $A, B \in M_n(\mathbb{Z})$ ), on dit que  $A$  et  $B$  sont *congrues modulo*  $m$  si l'on a les relations de congruence  $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, [A]_{i,j} \equiv [B]_{i,j} \pmod{m}$ . On notera dans ce cas  $A \equiv B \pmod{m}$ , Montrer  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall A, B \in M_n(\mathbb{Z}), A \equiv B \pmod{m} \Rightarrow \det(A) \equiv \det(B) \pmod{m}$ .
2. Soit  $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$  telle que  $\forall i, [A]_{i,i} = 0$  et  $\forall i \neq j, [A]_{i,j} \in \{\pm 1\}$ . Montrer que  $A$  est inversible.
3. Un fermier possède  $(2n + 1)$  vaches. À l'aide d'une énorme balance de Roberval, il remarque que, quelle que soit la vache que l'on laisse de côté, les  $2n$  vaches restantes peuvent se répartir en deux groupes de  $n$  de même masse totale. Montrer que toutes les vaches ont la même masse.
4. **Question bonus.** Dessiner la scène précédente, et l'envoyer par mail à M. Dutrieux (en me mettant en copie).



**Exercice 20<sup>+</sup> (Déterminant de Hurwitz et théorème de De Bruijn-Erdős).**\_\_\_\_\_

1. Soit  $A, H \in M_n(\mathbb{K})$ , avec  $H$  de rang 1. Montrer que  $t \mapsto \det(A + tH)$  est une fonction affine.

2. Soit  $a, b, r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$ . Calculer 
$$\begin{vmatrix} r_1 & a & a & \cdots & a \\ b & r_2 & a & \cdots & a \\ b & b & r_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & r_n \end{vmatrix}.$$

3. En déduire que 
$$\begin{pmatrix} r_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & r_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & r_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & r_n \end{pmatrix}$$
 est inversible dès que  $r_i > 1$ .

4. En déduire que  $n$  points non alignés du plan définissent au moins  $n$  droites.

### Mélange

**Exercice 21.**\_\_\_\_\_

Soit  $n \geq 1$ . Montrer qu'il existe  $J \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $J^2 = -I_n$  si et seulement si  $n$  est pair.

**Exercice 22<sup>+</sup>.**\_\_\_\_\_ 

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  telles que  $A, B$  et  $A + B$  soient inversibles vérifiant  $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$ .

Montrer que  $\det A = \det B$ .

**Exercice 23.**\_\_\_\_\_ 

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice dont tous les coefficients appartiennent à  $\{\pm 1\}$ .

Montrer que  $\det A$  est un entier divisible par  $2^{n-1}$ .

**Exercice 24<sup>+</sup>.**\_\_\_\_\_ 

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et muni d'une base  $\mathcal{B}$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que

$$\varphi : \begin{cases} E \times \cdots \times E \rightarrow & \mathbb{K} \\ (v_1, \dots, v_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), x_2, \dots, x_n) + \cdots + \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, u(x_n)). \end{cases}$$

Montrer  $\varphi = \text{tr}(u) \det_{\mathcal{B}}$ .

**Exercice 25.**\_\_\_\_\_

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ . À quelle condition a-t-on

$$\forall x_1 < x_2 < x_3, \begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} \geq 0 ?$$

**Exercice 26<sup>+</sup>**.

---

Soit  $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Montrer que  $(f_1, \dots, f_n)$  est libre si et seulement s'il existe  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  tels que  $\det (f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$ .

**Exercice 27**.

---

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Existe-t-il une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \det(A + B) = f(\det A, \det B) ?$$

2. Quelles sont les matrices  $A \in M_n(\mathbb{R})$  telles que

$$\forall B \in M_n(\mathbb{R}), \det(A + B) = \det(A) + \det(B) ?$$

**Exercice 28<sup>+</sup>**.

---

X  

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} \geq 0$ .