Factorisation des polynômes et décompositions en éléments simples

Exercice 17.

On pourra commencer par montrer que toutes les racines de P appartiennent à $\{j, j^2\}$, ce qui était d'ailleurs un exercice dans une feuille précédente.

Exercice 18.

Pour la deuxième question, on pourra partir du produit, utiliser la formule d'Euler puis, dans chaque facteur du produit, une factorisation permettant de faire apparaître la valeur $P(1) = n + 1$.

Exercice 19.

On pourra commencer par factoriser le polynôme $T_{2n} - 1$, où l'on a noté T_{2n} le $(2n)$-ième polynôme de Čebyšëv. À partir de là, on pourra mettre la main sur un polynôme dont les $5 - 4\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ sont racines doubles, puis appliquer une relation coefficients-racines.

Exercice 20.

Pour la deuxième question, on pourra se demander à quoi ressemble la décomposition en facteurs irréductibles d'un polynôme à valeurs positives.

Exercice 25.

Il s'agit de décomposer en éléments simples $\frac{1}{P}$, $\frac{1}{XP}$ et $\frac{P''}{P}$, respectivement.

Autocorrection

Autocorrection A.

Première méthode. On utilise la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}(X+1)^n - nX - 1 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k - nX - 1 \\ &= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} X^k \\ &= X^2 \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} X^{k-2}}_{\in K[X]},\end{aligned}$$

donc ce polynôme est divisible par X^2.

Deuxième méthode. Notons $P = (X+1)^n - nX - 1$. On observe :

- que $P(0) = (0+1)^n - n\,0 - 1 = 0$, donc 0 est racine de P ;
- que $P' = n(X+1)^{n-1} - n$, donc $P'(0) = n1^{n-1} - n = 0$.

On a donc $\mu_0(P) \geqslant 2$. Comme $X^{\mu_0(P)}$ divise (par définition) P, on en déduit que X^2 divise P.

Autocorrection B.

Un calcul direct montre que $P(i) = P'(i) = 0$.

D'après la caractérisation différentielle de la multiplicité, cela entraîne que i est racine multiple de P, c'est-à-dire $\mu_i(P) \geqslant 2$.

Comme P est un polynôme à coefficients réels, cela entraîne $\mu_{-i}(P) \geqslant 2$.

On en déduit que $X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$ divise P (en utilisant le caractère absolu de la divisibilité).

Autocorrection C.

Comme P divise $Q^2 - Q$, on peut trouver $R \in K[X]$ tel que $Q^2 - Q = RP$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $D(n)$ l'assertion « P divise $Q^n - Q$ ».

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}^*, D(n)$ par récurrence.

Initialisation. Pour $n = 1$, $Q^n - Q = 0$ est divisible par tout polynôme, ce qui montre $D(1)$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $D(n)$. Montrons $D(n + 1)$.

On sait que P divise $Q^n - Q$, c'est-à-dire que l'on peut trouver $S \in K[X]$ tel que $Q^n - Q = SP$. On en déduit $Q^{n+1} - Q^2 = QPS$, puis $Q^{n+1} - Q = (Q^{n+1} - Q^2) + (Q^2 - Q) = SP + RP = (S + R)P$, ce qui montre $D(n + 1)$, et clôt la récurrence.

Autocorrection D.

On utilise ici la notation classique $\zeta_n = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

(i) Sur $\mathbb{C}$: $X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \bar{j})$;
Sur $\mathbb{R}$, le polynôme est irréductible.

(ii) Sur $\mathbb{C}$: $X^4 - 4 = (X^2 - 2)(X^2 + 2) = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X - \sqrt{2}i)(X + \sqrt{2}i)$.
Sur $\mathbb{R}$: $(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X^2 + 2)$.

(iii) Sur $\mathbb{C}$: $X^4 + 1 = (X - \zeta_8)(X - \zeta_8^3)(X - \zeta_8^5)(X - \zeta_8^7)$ (les racines sont les racines quatrièmes de -1).
Sur $\mathbb{R}$, on rassemble les racines conjuguées :

$$\begin{aligned} X^4 + 1 &= (X - \zeta_8)(X - \zeta_8^3)(X - \zeta_8^5)(X - \zeta_8^7) \\ &= \left[(X - \zeta_8)(X - \zeta_8^7)\right]\left[(X - \zeta_8^3)(X - \zeta_8^5)\right] \\ &= \left(X^2 - \sqrt{2}X + 1\right)\left(X^2 + \sqrt{2}X + 1\right). \end{aligned}$$

(iv) Sur $\mathbb{C}$: $X^6 + 27 = \displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_6} \left(X - \omega\, i\sqrt{3}\right) = \prod_{\substack{k \in [\![0,11]\!] \\ k \text{ impair}}} \left(X - \sqrt{3}\,\zeta_{12}^k\right)$.

Sur $\mathbb{R}$ (un petit dessin aide),

$$\begin{aligned} X^6 + 27 &= \left[\left(X - \sqrt{3}\,\zeta_{12}\right)\left(X - \sqrt{3}\,\zeta_{12}^{11}\right)\right]\left[\left(X - \sqrt{3}\,i\right)\left(X + \sqrt{3}\,i\right)\right]\left[\left(X - \sqrt{3}\,\zeta_{12}^5\right)\left(X - \sqrt{3}\,\zeta_{12}^7\right)\right] \\ &= (X^2 - 3X + 3)(X^2 + 3)(X^2 + 3X + 3). \end{aligned}$$

(v) Sur $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} (X^2 - X + 1)^2 + 1 &= \left[\left(X^2 - X + 1\right) - i\right]\left[\left(X^2 - X + 1\right) + i\right] \\ &= \left(X^2 - X + (1 - i)\right)\left(X^2 - X + 1 + i\right) \\ &= (X + i)(X - (1 + i))(X - i)(X - (1 - i)). \end{aligned}$$

Sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(X^2 - X + 1)^2 + 1 &= \left[(X+i)(X-i)\right]\left[(X-(1+i))(X-(1-i))\right] \\ &= \left(X^2+1\right)\left(X^2-2X+2\right).\end{aligned}$$

(vi) On se rend compte (soit successivement soit, si l'on sent l'arnaque, en vérifiant que les premières dérivées du polynôme ont 1 comme racine) que $(X-1)^3$ divise le polynôme. On obtient alors

$$\begin{aligned}X^5 - 10X^4 + 25X^3 - 25X^2 + 10X - 1 &= (X-1)^3(X^2 - 7X + 1) \\ &= (X-1)^3\left(X - \frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right),\end{aligned}$$

ce qui est à la fois la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

(vii) L'indication montre qu'il existe une racine z telle que la somme des trois racines vaille $2z$. D'après les relations coefficients-racines, cette somme vaut en fait 8, donc on obtient que 4 est racine. Ainsi,

$$X^3 - 8X^2 + 23X - 28 = (X-4)(X^2 - 4X + 7),$$

ce qui est la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$.
La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ s'obtient alors immédiatement :

$$X^3 - 8X^2 + 23X - 28 = (X-4)(X-(2+\sqrt{3}\,i))(X-(2-\sqrt{3}\imath)).$$

(viii) L'indication nous permet d'obtenir une factorisation de la forme

$$X^4 + 12X - 5 = (X^2 - 2X + a)(X^2 + bX + c),$$

d'où l'on tire immédiatement $b = 2$ puis, rapidement, $a = 5$ et $c = -1$.
Ainsi,

$$X^4 + 12X - 5 = (X^2 - 2X + 5)(X^2 + 2X - 1) = (X^2 - 2X + 5)(X + 1 + \sqrt{2}))(X + 1 - \sqrt{2}),$$

ce qui est la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
On obtient alors la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^4 + 12X - 5 = (X-(1+2i))(X-(1-2i))(X+1+\sqrt{2}))(X+1-\sqrt{2}).$$

Autocorrection E.

(i) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1,2\}, \dfrac{x^3}{(x-1)(x-2)} = x + 3 - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{8}{x-2}.$

(ii) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \pm i\}, \dfrac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1-i}{4}\dfrac{1}{x-i} + \dfrac{1+i}{4}\dfrac{1}{x+i}.$

(iii) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}_4, \dfrac{x^4+1}{x^4-1} = 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{i}{2}\dfrac{1}{x-i} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{i}{2}\dfrac{1}{x+i}.$

(iv) $\forall x \in \mathbb{C}, \setminus\{1,2,3\}, \dfrac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{5}{x-2} + \dfrac{5}{x-3}.$

(v) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 2, \pm i\}, \dfrac{10x^3}{(x^2+1)(x^2-4)} = \dfrac{4}{x+2} + \dfrac{4}{x-2} + \dfrac{1}{x-i} + \dfrac{1}{x+i}.$

(vi) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, j, j^2\}, \dfrac{5}{(x+1)^5 - x^5 - 1} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{\sqrt{3}i}{2}\dfrac{1}{x-j} - \dfrac{\sqrt{3}i}{4}\dfrac{1}{x-j^2}.$

Autocorrection F.

(i) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus [\![0, n]\!], \dfrac{1}{x(x-1)\cdots(x-n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\left((-1)^{n-k}\, k!\,(n-k)!\right)^{-1}}{x-k} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{1}{x-k}.$

(ii) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}_n, \dfrac{x^{n-1}}{x^n-1} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\frac{1}{x-\omega}.$

(iii) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \left(\mathbb{U}_{2n} \setminus \mathbb{U}_n\right), \dfrac{x^n-1}{x^n+1} = 1 + \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_{2n}\setminus\mathbb{U}_n}\frac{\omega}{x-\omega}.$

Autocorrection G.

(i) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \dfrac{x^3}{(x-1)^3} = 1 + \dfrac{3}{(x-1)^2} + \dfrac{3}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x-1}.$

(ii) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 3\}, \dfrac{1}{(x+1)^2(3-x)} = -\dfrac{1}{16}\dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{16}\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(x+1)^2}\,;$

(iii) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}, \dfrac{1}{(x^2-1)(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)^3} = \dfrac{1}{8}\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{8}\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(x+1)^3}\,;$

(iv) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 2\}, \dfrac{7x^2+4x-4}{x^4-4x^2} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{1}{x+2}\,;$

(v) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0\}, \dfrac{3x-1}{x^2(x+1)^2} = \dfrac{5}{x} - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{5}{x+1} - \dfrac{4}{(x+1)^2}\,;$

(vi) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{2\}, \dfrac{x^3-1}{(x-2)^2} = x + 4 + \dfrac{12}{x-2} + \dfrac{7}{(x-2)^2}.$

Autocorrection H.

Le théorème hors-programme garantit l'existence de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm i\}, \quad \underbrace{\frac{x^4+x+1}{x(x^2+1)^3}}_{=\frac{x^4+1}{x(x^2+1)^3}+\frac{1}{(x^2+1)^3}} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta x+\gamma}{x^2+1} + \frac{\delta x+\varepsilon}{(x^2+1)^2} + \frac{\zeta x+\eta}{(x^2+1)^3}$$

(l'égalité est donc notamment valable sur $\mathbb{R}^*$). En utilisant l'unicité de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, on en déduit

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm i\}, \begin{cases} \dfrac{x^4+1}{x(x^2+1)^3} = \dfrac{\alpha}{x} + \dfrac{\beta x}{x^2+1} + \dfrac{\delta x}{(x^2+1)^2} + \dfrac{\zeta x}{(x^2+1)^3} \\ \dfrac{1}{(x^2+1)^3} = \dfrac{\gamma}{x^2+1} + \dfrac{\varepsilon}{(x^2+1)^2} + \dfrac{\eta}{(x^2+1)^3}. \end{cases}$$

Coup de chance, la partie paire est déjà un élément simple, donc on a $\gamma = \varepsilon = 0$ et $\eta = 1$.

On utilise alors les techniques classiques sur la première décomposition en éléments simples.

- En « chassant » le x au dénominateur puis en prenant la limite en 0, $\alpha = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4+1}{(x^2+1)^3} = 1.$
- En « chassant » le $(x^2+1)^3$ au dénominateur puis en prenant la limite en i (*whatever it means*), il vient $\zeta i = \lim\limits_{x\to i}\dfrac{x^4+1}{x}$, c'est-à-dire $\zeta i = \dfrac{2}{i}$, c'est-à-dire $\zeta = -2$.
- En considérant la limite de $x \mapsto xf(x)$ en $+\infty$, il vient $1 + \beta = 0$, c'est-à-dire $\beta = -1$.

À ce stade, on a

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm i\}, \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^3} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{\delta x}{(x^2+1)^2} - \frac{2x}{(x^2+1)^3}.$$

En évaluant en 1 (par exemple), on obtient la valeur manquante $\delta = 0$.

In fine, on obtient la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm i\}, \frac{x^4+x+1}{x(x^2+1)^3} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1-2x}{(x^2+1)^3}.$$

Ça aurait pu être pire !