Factorisation des polynômes et décompositions en éléments simples

Divisibilité

Autocorrection A.

Montrer par deux méthodes différentes que X^2 divise $(X+1)^n - nX - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Autocorrection B.

Montrer que $(X^2+1)^2$ divise $3X^{11} - 2X^{10} - 4X^8 - 8X^7 - 2X^6 - 4X^5 + X^3$.

Autocorrection C.

Soit $P, Q \in K[X]$. On suppose que P divise $Q^2 - Q$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P divise $Q^n - Q$.

Exercice 1.

Trouver tous les couples $(\lambda, \mu) \in K^2$ tels que le polynôme $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$.

Exercice 2.

Trouver les $a \in \mathbb{C}$ tels que le polynôme $X^4 - X + a$ soit divisible par $X^2 - aX + 1$.

Exercice 3$^+$.

Soit $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{N}$ des entiers tels que $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \alpha_k \equiv k \pmod n$.

Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} X^k$ divise $\sum_{k=0}^{n-1} X^{\alpha_k}$.

Exercice 4.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme $(X+1)^{6n} - X^{6n} - 1$ est-il divisible par $(X^2+X+1)^2$?

Exercice 5.

1. Soit $P \in K[X]$.
   (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que $P - X$ divise $P^k - X^k$.
   (b) En déduire que $P - X$ divise $P \circ P - X$.
2. Déterminer les racines complexes du polynôme $(X^2+3X+1)^2 + 3X^2 + 8X + 4$.

Exercice 6$^+$.

Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que P divise Q si et seulement si $P(X^m)$ divise $Q(X^m)$.

Exercice 7$^+$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme complexe $P_n = X^n - 1$. Soit $a, b \geqslant 2$.

1. Montrer que a divise b si et seulement si P_a divise P_b.
2. Montrer que a et b sont premiers entre eux si et seulement si $P_a P_b$ divise $(X-1)P_{ab}$.

Exercice 8. ☑

Déterminer $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 5 tel que $(X-1)^3$ divise $P+1$ et $(X+1)^3$ divise $P-1$.

Exercice 9.

Déterminer quels polynômes $P \in K[X]$ sont divisibles par leur dérivée.

Exercice 10.

Dans les trois questions suivantes, on donne deux polynômes $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, et on demande de déterminer le reste de P dans la division euclidienne par Q.

(i) $P = X^{100}$ et $Q = (X-1)^3(X+1)$;

(ii) $P = X^{2n}$ et $Q = (X^2+1)^2$;

(iii) $P = (X+1)^{2n+1} - X^{2n+1}$ et $Q = X^2 + X + 1$.

Exercice 11$^+$ (Théorème de De Bruijn).

Soit $a \leqslant b \leqslant c$ et $A \leqslant B \leqslant C$ des entiers $\geqslant 1$. On s'intéresse dans cet exercice à la possibilité de paver un pavé de taille $A \times B \times C$ par des briques de taille $a \times b \times c$. Donnons des définitions précises.

- Une *brique* est une partie de $\mathbb{N}^3$ de la forme $\mathcal{B} = [\![x, x']\!] \times [\![y, y']\!] \times [\![z, z']\!]$.
- La *taille* d'une telle brique sera le triplet de ses trois « dimensions » $x' - x + 1$, $y' - y + 1$, $z' - z + 1$, rangées par ordre croissant. Par exemple, $[\![3, 5]\!] \times [\![1, 6]\!] \times [\![2, 4]\!]$ est une brique de taille $(3, 3, 6)$.
- On se demande si le pavé $P = [\![1, A]\!] \times [\![1, B]\!] \times [\![1, C]\!]$ de taille (A, B, C) peut s'écrire comme union disjointe de briques de taille (a, b, c) : on dira alors pour simplifier que P est (a, b, c)-pavable.

1. Montrer que le pavé de taille $(5, 6, 6)$ n'est pas $(1, 2, 4)$-pavable.

Étant donné une partie finie $E \subseteq \mathbb{N}^3$, on définit son *poids* $w(E) = (X-1)^3 \sum_{(i,j,k)\in E} X^{i+j+k} \in \mathbb{R}[X]$.

2. Calculer le poids $w(P)$ du pavé $P = [\![1, A]\!] \times [\![1, B]\!] \times [\![1, C]\!]$.
3. Montrer que si P est (a, b, c)-pavable, alors $(X^a - 1)(X^b - 1)(X^c - 1) \mid w(P)$.
4. Montrer que le pavé de taille $(10, 10, 10)$ n'est pas $(1, 2, 4)$-pavable
5. Montrer que le pavé de taille $(7, 8, 9)$ n'est pas $(1, 2, 4)$-pavable.
6. Montrer le *théorème de De Bruijn* (1969) : si a divise b et b divise c, alors P est (a, b, c)-pavable si et seulement si, quitte à échanger A, B et C, on a $a \mid A$, $b \mid B$ et $c \mid C$.

Conséquences du théorème de d'Alembert-Gauss

Exercice 12$^+$. *X(PC)*

Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P et $P \circ P$ aient exactement les mêmes racines.

Exercice 13$^+$. ☑

Déterminer les $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \leqslant |Q(z)|$.

Factorisations

Autocorrection D.

Donner la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$, des polynômes suivants :

(i) X^2+X+1 ;

(ii) X^4-4 ;

(iii) X^4+1 ;

(iv) X^6+27 ;

(v) $(X^2-X+1)^2+1$;

(vi) $X^5-10X^4+25X^3-25X^2+10X-1$;

(vii) $X^3-8X^2+23X-28$, en sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième ;

(viii) $X^4+12X-5$, en sachant qu'il y a deux racines dont la somme vaut 2.

Exercice 14.

Factoriser les polynômes suivants sur $\mathbb{R}$.

(i) X^4+X^2+1 ;

(ii) X^4+X^2-6 ;

(iii) X^8+X^4+1.

Exercice 15.

Soit $a \in]0,\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$. Factoriser $X^{2n}-2\cos(na)X^n+1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 16.

On considère le polynôme $P=(1-X^2)^3+8X^3$.

1. Déterminer les solutions complexes de l'équation $\left(\dfrac{1-z^2}{2z}\right)^3=-1$.
2. En déduire la factorisation du polynôme P sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17⁺.

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2)=P(X)\,P(X-1)$.

Exercice 18⁺.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$.

1. Factoriser P sur $\mathbb{C}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

Exercice 19⁺⁺.

Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(5-4\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$.

Exercice 20⁺ (Positivstellensatz sur $\mathbb{R}$).

1. Soit $\mathcal{S}=\left\{A^2+B^2 \,\middle|\, A,B \in \mathbb{R}[X]\right\}$. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par produit.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer l'équivalence $P \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$.

Exercice 21⁺⁺ (Positivstellensatz sur $\mathbb{R}_+$).

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer $\big(\forall x \in \mathbb{R}_+, P(x) \geqslant 0\big) \Leftrightarrow \big(\exists A,B \in \mathbb{R}[X] : P=A^2+X\,B^2\big)$.

Décomposition en éléments simples des fonctions rationnelles

Autocorrection E.

Décomposer en éléments simples les fonctions rationnelles suivantes.

(i) $x \mapsto \dfrac{x^3}{(x-1)(x-2)}$; (iii) $x \mapsto \dfrac{x^4+1}{x^4-1}$; (v) $x \mapsto \dfrac{10x^3}{(x^2+1)(x^2-4)}$;

(ii) $x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1}$; (iv) $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$; (vi) $x \mapsto \dfrac{5}{(x+1)^5-x^5-1}$.

Autocorrection F.

Soit $n \geqslant 2$. Déterminer une décomposition en éléments simples des fonctions rationnelles suivantes :

(i) $x \mapsto \dfrac{1}{x(x-1)\cdots(x-n)}$; (ii) $x \mapsto \dfrac{x^{n-1}}{x^n-1}$; (iii) $x \mapsto \dfrac{x^n-1}{x^n+1}$.

Autocorrection G.

En utilisant la forme générale (hors-programme), donner les décompositions en éléments simples des fractions rationnelles suivantes. Quand le dénominateur n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, on donnera à la fois la décomposition sur $\mathbb{C}$ et celle sur $\mathbb{R}$.

(i) $x \mapsto \dfrac{x^3}{(x-1)^3}$; (iii) $x \mapsto \dfrac{1}{(x^2-1)(x+1)^2}$; (v) $x \mapsto \dfrac{3x-1}{x^2(x+1)^2}$;

(ii) $x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^2(3-x)}$; (iv) $x \mapsto \dfrac{7x^2+4x-4}{x^4-4x^2}$; (vi) $x \mapsto \dfrac{x^3-1}{(x-2)^2}$.

Autocorrection H.

En utilisant la forme générale (hors-programme) et l'unicité de la décomposition en somme d'une partie paire et d'une partie impaire, obtenir la décomposition en élements simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle $x \mapsto \dfrac{x^4+x+1}{x(x^2+1)^3}$.

Applications

Exercice 22.

Simplifier les expressions des suites $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 23.

Déterminer les sommes de séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+3}{n^3+3n^2+2n}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1}$ (après avoir justifié leur existence).

Exercice 24.

Soit $P \in K[X]$ un polynôme scindé, dont les racines sont $z_1, \dots, z_r$ (de multiplicités respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_r$).

Montrer la décomposition en éléments simples $\forall x \in K \setminus \{z_1, \dots, z_r\}, \dfrac{P'(x)}{P(x)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \frac{\alpha_k}{x - z_k}$.

Exercice 25$^+$.

Soit $n \geqslant 2$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme dont les racines $x_1, \dots, x_n$ sont simples et non nulles. En effectuant des décompositions en éléments simples bien choisies, montrer

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P'(x_k)} = 0$; (ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)} = -\frac{1}{P(0)}$; (iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0$.

Exercice 26^{++}.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ simplement scindé.

On note $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ ses racines et $b_1 < \cdots < b_{n-1}$ les racines de P'.

1. En décomposant en éléments simples $\dfrac{P'}{P}$ de deux façons différentes, montrer

$$\forall i \in [\![1, n]\!], n \prod_{j=1}^{n-1} (a_i - b_j) = \prod_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \neq i}} (a_i - a_k).$$

2. En déduire $\forall i \in [\![1, n-1]\!], a_i + \dfrac{a_{i+1} - a_i}{n} \leqslant b_i \leqslant a_{i+1} - \dfrac{a_{i+1} - a_i}{n}$.