

## Fonctions de deux variables

**Exercice 6.**

On pourra montrer les équations de Cauchy-Riemann dans le cas de polynômes très simples, puis montrer que des propriétés de stabilité par combinaison linéaire et par produit.

**Exercice 11.**

Pour la première question, on pourra considérer la fonction  $g : (x, y) \mapsto f(x + y, x - 2y)$ .

**Exercice 13.**

Pour la deuxième question, on pourra étudier  $x \mapsto f(x, -1)$  et  $x \mapsto f(x, x)$ .

### Autocorrection

**Autocorrection A.**

1. Quel que soit  $p \in \mathbb{R}^2$ , on a évidemment  $D(p, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$ .

2. Soit  $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Posons  $r = \|p\| > 0$ .

On a  $(0, 0) \notin D(p, r)$ , car  $\|p - (0, 0)\| = r$ . Cela montre  $D(p, r) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

3. Soit  $p = (a, b) \in ]0, 1[{}^2$ ; posons  $r = \min\{a, 1 - a, b, 1 - b\} > 0$ .

Montrons  $D(p, r) \subseteq ]0, 1[{}^2$ . Soit  $z = (x, y) \in D(p, r)$ .

On a  $(x - a)^2 \leq (x - a)^2 + (y - b)^2 = \|(x, y) - (a, b)\|^2 < r^2$ , donc  $|x - a| < r$  par stricte croissance de la fonction racine carré, ce qui donne  $a - r < x < a + r$ .

En particulier, les inégalités  $r \leq a$  et  $r \leq 1 - a$  montrent :

$$0 \leq a - r < x < a + r \leq 1,$$

ce qui donne  $x \in ]0, 1[$ . On montre de la même façon  $y \in ]0, 1[$ , ce qui donne  $z \in ]0, 1[{}^2$ , et conclut.

4. Notons  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \cos(x)\}$ ; soit  $p = (a, b) \in U$ .

Notons  $\varepsilon = \frac{b - \cos(a)}{2} > 0$ . Par continuité de la fonction cosinus, on peut trouver  $\eta > 0$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |\cos(x) - \cos(a)| \leq \varepsilon.$$

Soit  $r = \min\{\eta, \varepsilon\} > 0$ . Montrons  $D(p, r) \subseteq U$ .

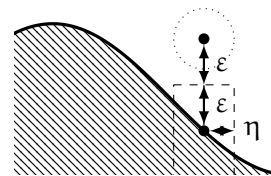
Soit  $z = (x, y) \in D(p, r)$ .

Comme dans la question précédente, on obtient  $|x - a| < r \leq \eta$  et  $|y - b| < r \leq \varepsilon$ .

En particulier, la première inégalité entraîne que  $|\cos(x) - \cos(a)| \leq \varepsilon$ , ce qui donne :

$$y - \cos(x) > (b - \varepsilon) - (\cos(a) + \varepsilon) = (b - \cos(a)) - 2\varepsilon \geq 0,$$

et montre  $z \in U$ .



### Autocorrection B.

Considérons  $q = (a + r, b)$ .

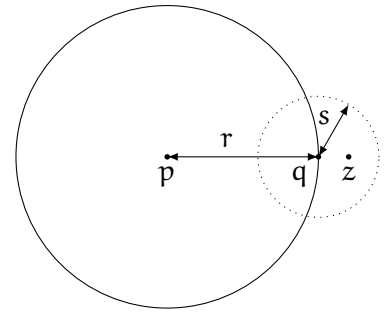
Comme  $\|q - p\| = r$ , on a  $q \in \overline{D}(p, r)$ . On va montrer qu'aucun disque ouvert centré en  $q$  n'est inclus dans  $\overline{D}(p, r)$ .

Soit  $s > 0$ .

Considérons le point  $z = (a + r + s/2, b)$ .

- Comme  $\|z - q\| = s/2 < s$ , on a bien  $z \in D(q, s)$ .
- Comme  $\|z - p\| = r + s/2 > r$ , on a  $z \notin \overline{D}(p, r)$ .

Cela montre que le disque  $D(q, s)$  n'est pas inclus dans  $\overline{D}(p, r)$ , et conclut.



### Autocorrection C.

On trouve :

$$\begin{aligned} \forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x}(a, b) &= \frac{1}{b} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(a, b) = -\frac{a}{b^2}; \\ \forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(a, b) &= -\frac{1}{a^2 b^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(a, b) = -\frac{2}{a b^3}; \\ \forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x}(a, b) &= \ln(ab) + 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_3}{\partial y}(a, b) = \frac{a}{b}; \\ \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \frac{\partial f_4}{\partial x}(a, b) = 2x e^{-x} \cos(x^2 + y^2) - e^{-x} \sin(x^2 + y^2) \\ \frac{\partial f_4}{\partial y}(a, b) = 2y e^{-x} \cos(x^2 + y^2). \end{cases} \end{aligned}$$

### Autocorrection D.

- L'application partielle  $v_1 : x \mapsto N(x, 0) = |x|$  n'étant pas dérivable en 0, la fonction  $N$  n'admet pas de première dérivée partielle en 0. Il en va de même pour la deuxième dérivée partielle.
- L'application  $N^2 : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$  appartient clairement à  $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ , par opérations, avec :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial(N^2)}{\partial x}(a, b) = 2a \quad \text{et} \quad \frac{\partial(N^2)}{\partial y}(a, b) = 2b.$$

Il s'ensuit que sa restriction à  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  est encore de classe  $C^1$ . Elle est par ailleurs à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

Par composition, la fonction racine carrée étant de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on en déduit que la restriction de  $N = \sqrt{N^2}$  à  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  est de classe  $C^1$ , avec :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad \frac{\partial N}{\partial x}(a, b) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial N}{\partial y}(a, b) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

### Autocorrection E.

La fonction  $\theta$  est de classe  $C^1$  d'après la première règle de la chaîne.

Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\theta'(a) = 2a \frac{\partial f}{\partial x}(a^2, a^3) + 3a^2 \frac{\partial f}{\partial y}(a^2, a^3).$$

## Autocorrection F.

---

1. On applique la deuxième règle de la chaîne aux fonctions  $\varphi : (x, y) \mapsto y$  et  $\psi : (x, y) \mapsto x$ . Ces fonctions étant de classe  $C^1$ , on a  $u_1 \in C^1(\mathbb{R}^2)$ .

Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial \psi}{\partial y}(a, b) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a, b) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(a, b) = 1,$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x}(a, b) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(a, b), \psi(a, b)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(a, b), \psi(a, b)) \frac{\partial \psi}{\partial x}(a, b) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(b, a). \end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial y}(a, b) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(a, b), \psi(a, b)) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(a, b), \psi(a, b)) \frac{\partial \psi}{\partial y}(a, b) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(b, a). \end{aligned}$$

2. On applique la première règle de la chaîne à  $g : x \mapsto x$  (qui va jouer le rôle des deux fonctions  $g$  et  $h$ ). Puisque  $g$  est de classe  $C^1$ , on a  $u_2 \in C^1(\mathbb{R})$ , et l'on a, pour tout  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} u_2'(a) &= \frac{\partial f}{\partial x}(g(a), g(a)) g'(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(a), g(a)) g'(a) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a, a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, a). \end{aligned}$$

Notons que l'on aurait pu également appliquer la formule de dérivation par rapport à un vecteur au point  $p = (0, 0)$  et au vecteur  $v = (1, 1)$ .

3. D'après la question précédente, la fonction ne dépendant que d'une variable  $\psi : (x, y) \mapsto f(x, x) = u_2(x)$  est de classe  $C^1$  et, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(a, b) = u_2'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(a, b) = 0.$$

La fonction  $\varphi : (x, y) \mapsto y$  étant également de classe  $C^1$ , on peut appliquer la deuxième règle de la chaîne et obtenir que  $u_3 \in C^1(\mathbb{R}^2)$  avec, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial x}(a, b) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(a, b), \psi(a, b)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(a, b), \psi(a, b)) \frac{\partial \psi}{\partial x}(a, b) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(b, f(a, a)) \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a, a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, a) \right) \\ \text{et} \quad \frac{\partial u_3}{\partial y}(a, b) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(a, b), \psi(a, b)) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a, b) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(a, b), \psi(a, b)) \frac{\partial \psi}{\partial y}(a, b) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(b, f(a, a)). \end{aligned}$$

4. On applique la première règle de la chaîne à la fonction  $u_3$  et à  $g : x \mapsto x$  (qui joue le rôle des deux fonctions  $g$  et  $h$ ). On a donc  $u_4 \in C^1(\mathbb{R})$  et, pour tout  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} u_4'(x) &= \frac{\partial u_3}{\partial x}(g(a), g(a)) g'(a) + \frac{\partial u_3}{\partial y}(g(a), g(a)) g'(a) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(a, f(a, a)) \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a, a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, a) \right) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, f(a, a)). \end{aligned}$$

## Autocorrection G.

---

1. On a

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f_1}{\partial x}(a, b) = \sin(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(a, b) = 2b,$$

donc les points critiques de  $f_1$  forment l'ensemble  $\{(k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

Les extrema locaux de  $f_1$  sont à chercher parmi ces points.

- Si  $k \in \mathbb{Z}$  est pair,  $k\pi$  est un maximum local de la fonction cosinus. Le point  $(k\pi, 0)$  n'est alors ni un maximum local (car  $f_1(k\pi, \varepsilon) > f_1(k\pi, 0)$  pour tout  $\varepsilon > 0$ ) ni un minimum local (car  $f_1(k\pi + \varepsilon, 0) < f_1(k\pi, 0)$  pour tout  $\varepsilon \in ]0, 2\pi[$ ).

Ce point critique n'est donc pas un extremum local.

- Si  $k \in \mathbb{Z}$  est impair, on a  $f_1(k\pi, 0) = -1$ . Or, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a  $f_1(x, y) = \cos(x) + y^2 \geq -1$ , donc ce point critique est un minimum global.

2. On a :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f_2}{\partial x}(a, b) = 3e^{3a}b^2 + e^a b \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(a, b) = 2e^{3x}y + e^x.$$

Comme  $3e^{3a} + e^a > 0$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial x}(a, b)$  ne s'annule que si  $b = 0$ . Or,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \frac{\partial f_2}{\partial y}(a, 0) = e^x > 0,$$

donc les deux dérivées partielles ne s'annulent pas simultanément.

On en déduit que  $f_2$  n'a pas de point critique, et donc pas d'extremum global.

3. On a :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f_3}{\partial x}(a, b) = 6a - 2b - 8 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_3}{\partial y}(a, b) = -2a + 6b + 8.$$

Après résolution du système linéaire, on trouve un seul point critique :  $(1, -1)$ , en lequel la fonction vaut  $-8$ . Pour tout  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ , on a alors après calcul :

$$f_2(1+h, -1+k) + 8 = 3h^2 - 2hk + 3k^2.$$

Si  $k = 0$ , cette quantité est clairement positive. Si  $k \neq 0$ , on peut mettre sous forme canonique :

$$f_2(1+h, -1+k) + 8 = 3 \left( h - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{8}{3}k^2 \geq 0,$$

d'où l'on déduit que :

$$\forall (h, k) \in \mathbb{R}^2, f_1(1+h, -1+k) \geq f(1, -1)$$

et l'unique point critique  $(1, -1)$  de  $f_3$  est son minimum.

4. On a :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{\partial f_4}{\partial x}(a, b) = \arctan(b) \exp(a \arctan(b)) \\ \frac{\partial f_4}{\partial y}(a, b) = \frac{a}{1+b^2} \exp(a \arctan(b)). \end{cases}$$

On en déduit facilement que le seul point critique de  $f_4$  est l'origine (avec  $f_4(0, 0) = 1$ ).

Or, pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on voit que  $f_4(a, b) - 1$  est du même signe que  $a \arctan(b)$ , c'est-à-dire du signe de  $a b$ . On en déduit que l'origine n'est pas un extremum local.

La fonction  $f_4$  n'a donc pas d'extremum local.