

---

## Arithmétique

---

**Exercice 3.**

Essayer de réécrire les équations pour obtenir des formes factorisées (par exemple, la première peut être mise sous forme  $ab = 6$ ).

**Exercice 4.**

Un diviseur commun à  $n^2 + n$  et  $2n + 1$  est nécessairement diviseur de tous les nombres de la forme  $u(n^2 + n) + v(2n + 1)$  : on peut alors choisir  $u$  et  $v$  de façon à obtenir plus de renseignements sur le diviseur.

**Exercice 18.**

On pourra commencer par montrer que si  $(x, y)$  est une solution telle que  $x \leq y$  alors  $x \mid y$ .

## Autocorrection

**Autocorrection A.**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

- (i)  $n$  est un multiple de 2 si et seulement si son dernier chiffre est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- (ii)  $n$  est un multiple de 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 3 ;
- (iii)  $n$  est un multiple de 4 si et seulement si le nombre obtenu en gardant ses deux derniers chiffres est un multiple de 4 ;
- (iv)  $n$  est un multiple de 5 si et seulement si son dernier chiffre est 0 ou 5 ;
- (v)  $n$  est un multiple de 8 si et seulement si le nombre obtenu en gardant ses trois derniers chiffres est un multiple de 8 ;
- (vi)  $n$  est un multiple de 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.
- (vii)  $n$  est un multiple de 10 si et seulement si son dernier chiffre est 0 ;
- (viii)  $n$  est un multiple de 11 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres l'est.

On note  $c_0, c_1, \dots, c_r$  les chiffres de  $n$ , lus de droite à gauche. On a donc l'égalité

$$n = \sum_{i=0}^r c_i 10^i.$$

► On a l'égalité

$$n = c_0 + 10 \times \underbrace{\left( \sum_{i=1}^r c_i 10^{i-1} \right)}_{\in \mathbb{N}},$$

donc  $n$  est divisible par 2, 5 ou 10 si et seulement si  $c_0$  l'est, ce qui démontre les points (i), (v) et (vii).

► On a l'égalité

$$n = (c_0 + 10 c_1) + 100 \times \underbrace{\left( \sum_{i=2}^r c_i 10^{i-2} \right)}_{\in \mathbb{N}},$$

donc  $n$  est divisible par 4 si et seulement si  $c_0 + 10 c_1$  l'est, ce qui démontre le point (iii).

► On montre de la même façon le critère de divisibilité par 8 (et même par toute puissance de 2).

► On a  $10 \equiv 1 \pmod{9}$  et donc modulo 3, donc  $n \equiv \sum_{i=0}^r c_i \pmod{9}$  (et donc modulo 3).

En particulier,  $n$  est divisible par 3 ou 9 si et seulement si  $\sum_{i=0}^r c_i$  l'est, ce qui démontre les points (ii) et (vi).

► On a  $10 \equiv -1 \pmod{11}$ , donc  $n \equiv \sum_{i=0}^r (-1)^i c_i$ , ce qui démontre (viii) de la même façon.

Les critères montrent facilement que 14 652 est divisible par 4, 9 et 11, et donc par  $4 \times 9 \times 11 = 396$ .  
En posant la division,  $14\,652 = 396 \times 37$ .

Comme 37 est premier, on obtient  $14\,652 = 2^2 \times 3^2 \times 11 \times 37$ .

### Autocorrection B.

---

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

(i) L'égalité  $n + 3 = (n + 1) + 2$  permet d'écrire la première équivalence de la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned}n + 1 \mid n + 3 &\Leftrightarrow n + 1 \mid 2 \\ &\Leftrightarrow n + 1 \in \{1, 2\} \\ &\Leftrightarrow n \in \{0, 2\}.\end{aligned}$$

(ii) L'égalité  $n^2 + 3n + 8 = (n + 2)(n + 1) + 6$  permet d'écrire la première équivalence de la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned}n + 2 \mid n^2 + 3n + 8 &\Leftrightarrow n + 2 \mid 6 \\ &\Leftrightarrow n + 2 \in \{1, 2, 3, 6\} \\ &\Leftrightarrow n + 2 \in \{2, 3, 6\} && \text{car } n \geq 0 \\ &\Leftrightarrow n \in \{0, 1, 4\}.\end{aligned}$$

### Autocorrection C.

---

(i) On a

$$438 = 8 \times 51 + 30 \tag{1}$$

$$51 = 1 \times 30 + 21 \tag{2}$$

$$30 = 1 \times 21 + 9 \tag{3}$$

$$21 = 2 \times 9 + 3 \tag{4}$$

$$9 = 3 \times 3 + 0,$$

donc  $\text{pgcd}(438, 51) = 3$ .

(ii) Par le même calcul, on obtient  $\text{pgcd}(151, 77) = 1$ .

(iii)  $\text{pgcd}(1320, 720) = 120$ .

(iv)  $\text{pgcd}(63, 17) = 1$  (la primalité de 17 rend d'ailleurs cela évident).

(v)  $\text{pgcd}(120, 23) = 1$  (même remarque : 23 est premier).

(vi)  $\text{pgcd}(8136, 492) = 12$ .

**Autocorrection D.**

---

L'entier  $n! + 1$  est  $\geq 2$ , donc il admet un diviseur premier  $p \leq n! + 1$ .

Il reste à montrer que  $p > n$ . Pour cela, il suffit de constater que si  $p \leq n$ , on a  $p \mid n!$ , donc on a  $p \wedge (n! + 1) = p \wedge 1 = 1$ , ce qui contredit la définition de  $p$ .

En particulier, on a montré que quel que soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existait un nombre premier  $p > n$ . Il existe des nombres premiers arbitrairement grands, ce qui démontre qu'il existe une infinité de nombres premiers.