Huitième composition de mathématiques [corrigé]

Exercice. Interro de calcul du vendredi.

1. Calculer $\displaystyle\int_1^e x^5 \ln(x)\,dx$.

On peut effectuer une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_1^e x^5 \ln(x)\,dx &= \left[\frac{x^6}{6}\ln(x)\right]_{x=1}^e - \frac{1}{6}\int_1^e x^6\,\frac{1}{x}\,dx \qquad \left(x\mapsto \frac{x^6}{6} \text{ et } \ln \text{ sont } C^1\right)\\ &= \frac{e^6}{6} - \frac{1}{6}\left[\frac{1}{6}x^6\right]_{x=1}^e\\ &= \frac{e^6}{6} - \frac{1}{36}(e^6-1)\\ &= \frac{1+5e^6}{36}.\end{aligned}$$

2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{dx}{e^x+e^{2x}}$.

On effectue le changement de variables $x = \ln(u)$ *(ce qui est possible car le logarithme est* C^1*) :*

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{dx}{e^x+e^{2x}} = \int_1^2 \frac{1}{u+u^2}\frac{du}{u} = \int_1^2 \frac{du}{u^2(u+1)}.$$

La décomposition en éléments simples de cette fraction rationnelle est

$$\forall u\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\},\ \frac{1}{u^2(u+1)} = \frac{\alpha}{u^2}+\frac{\beta}{u}+\frac{\gamma}{1+u},$$

pour trois nombres réels α,β,γ.

- *La technique usuelle (on chasse une partie du dénominateur, puis on regarde la limite au point correspondant) donne* $\alpha = 1$ *et* $\gamma = 1$.
- *L'argument asymptotique en* $\pm\infty$ *donne* $\beta+\gamma = 0$, *donc* $\beta = -1$.

Ainsi, $\forall u\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\},\ \dfrac{1}{u^2(u+1)} = \dfrac{1}{u^2}-\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{1+u}$.

On peut alors reprendre le calcul :

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(2)} \frac{dx}{e^x+e^{2x}} &= \int_1^2\frac{du}{u^2} - \int_1^2\frac{du}{u} + \int_1^2\frac{du}{u+1}\\ &= \left[-\frac{1}{u}\right]_{u=1}^2 - [\ln u]_{u=1}^2 + \left[\frac{1}{u+1}\right]_{u=1}^2\\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right) - \ln 2 + \big(\ln(3)-\ln(2)\big)\\ &= \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{3}{4}\right).\end{aligned}$$

Problème A. Endomorphismes k-déplaçants et k-universels.

Dans tout ce problème, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et toutes les notions d'algèbre linéaire sont à comprendre avec K comme corps des scalaires.

On se donne un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$.
On fixe également un entier naturel $k \in \mathbb{N}^*$.

Les parties V, VI et VII sont indépendantes de celles qui précèdent.

1. **Question de cours.** Soit V un sous-espace vectoriel de E.

   Montrer que l'image directe $u[V] = \{u(x) \mid x \in V\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

   - *Déjà,* $0_E = u(0_E)$. *Comme* $0_E \in V$, *on en déduit* $0_E \in u[V]$.
   - *Soit* $y_1, y_2 \in u[V]$ *et* $\lambda \in K$. *On peut trouver* $x_1, x_2 \in V$ *tels que* $y_1 = u(x_1)$ *et* $y_2 = u(y_2)$. *On en déduit que*

   $$\lambda y_1 + y_2 = u\big(\underbrace{\lambda x_1 + x_2}_{\in V}\big) \in u[V].$$

- On dit qu'un sous-espace vectoriel V de E est *déplacé (par u)* si V et $u[V]$ sont en somme directe.
- L'endomorphisme u est dit k-*déplaçant* s'il existe un sous-espace vectoriel V de E de dimension k qui est déplacé par u.

Partie I. Un exemple polynomial.

Étant donné un polynôme $P \in K_2[X]$, on définit* $\varphi(P) = X\,P'(X) + P'(X+1)$.

2. Montrer que φ définit un endomorphisme de $K_2[X]$.

   Soit $P \in K_2[X]$. *On a*
   - $\deg P' \leqslant 1$, *donc* $\deg\big(X\,P'\big) = 1 + \deg P' \leqslant 2$;
   - $\deg P' \leqslant 1$, *donc* $\deg P'(X+1) \leqslant 1$, *par composition.*

   Par stabilité par combinaison linéaire, $X\,P'(X) + P'(X+1) \in K_2[X]$, *ce qui montre déjà que l'application* φ *est bien définie.*

   Enfin, la linéarité de φ *est une conséquence directe de celle de la dérivation, et de la bilinéarité du produit.*

3. Calculer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(\varphi)$ de l'endomorphisme dans la base canonique $\mathscr{B}_c = \big(1, X, X^2\big)$.

   On a $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = X + 1$ *et* $\varphi(X^2) = X\,2X + 2(X+1) = X^2 + 2X + 2$, *si bien que*

   $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. (a) Montrer que $\varphi(X^2) \notin \mathrm{Vect}\big(1, X^2\big)$.

   Tout élément $P \in \mathrm{Vect}(1, X^2)$ *vérifie* $\mathrm{coeff}_1(P) = 0$.

   Ce n'est manifestement pas le cas de $\varphi(X^2) = 2X^2 + 2X + 2$.

*. Pour éviter toute confusion : $P'(X)$ et $P'(X+1)$ **ne sont pas** des multiplications.

(b) En déduire que $\mathrm{Vect}(1, X^2)$ est déplacé par φ.

On va minimiser les calculs, au prix d'une utilisation peut-être un peu exagérée du yoga de l'algèbre linéaire. *Remarquons que*

$$\varphi\left[\mathrm{Vect}(1, X^2)\right] = \mathrm{Vect}\big(\underbrace{\varphi(1)}_{=0}, \varphi(X^2)\big) = \mathrm{Vect}\big(\varphi(X^2)\big).$$

Comme $(1, X^2)$ *est une sous-famille de* $\mathscr{B}_c$*, elle est libre. En lui ajoutant* $\varphi(X^2) \notin \mathrm{Vect}(1, X^2)$*, on obtient donc une famille libre* $\big(1, X^2, \varphi(X^2)\big)$*, d'après le lemme de précipitation.*

Cette famille ayant $3 = \dim K_2[X]$ *vecteurs, elle est une base de* $K_2[X]$*. On en déduit que*

$$K_2[X] = \mathrm{Vect}(1, X^2) \oplus \underbrace{\mathrm{Vect}(\varphi(X^2))}_{=\varphi\left[\mathrm{Vect}(1,X^2)\right]},$$

ce qui est une jolie façon de montrer que $\mathrm{Vect}(1, X^2)$ *est déplacé par* φ.

(c) L'endomorphisme φ est donc 2-déplaçant. Est-il 3-déplaçant ?

Non.

Supposons par l'absurde qu'il existe un sous-espace vectoriel V *de* $K_2[X]$ *de dimension* 3 *qui soit déplacé par* φ.

Par inclusion et égalité des dimensions, on a $V = K_2[X]$*. Pourtant,* $1 + X = \varphi(X)$ *est non nul et appartient simultanément à* V *et à* $\varphi[V]$*, ce qui est impossible.*

5. (a) Montrer que $\varphi + \mathrm{id}_{K_2[X]}$ est un automorphisme de $K_2[X]$.

On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}\big(\varphi + \mathrm{id}_{K_2[X]}\big) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}\big(\varphi\big) + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire supérieure sans zéro sur la diagonale, donc elle est inversible. On en déduit que $\varphi + \mathrm{id}_{K_2[X]}$ *est un automorphisme de* $K_2[X]$.

(b) En déduire que $\varphi + \mathrm{id}_{K_2[X]}$ n'est pas 2-déplaçant.

Notons $\psi = \varphi + \mathrm{id}_{K_2[X]}$.

Soit V *un sous-espace vectoriel de* $K_2[X]$ *de dimension* 2*. Montrons qu'il n'est pas déplacé par* ψ.

L'automorphisme ψ *induit un isomorphisme entre* V *et* $\psi[V]$*, si bien quie* $\dim \psi[V] = \dim V = 2$*. On a donc* $\dim V + \dim \psi[V] > \dim E$*, ce qui montre que* V *et* $\psi[V]$ *ne peuvent pas être en somme directe.*

(c) L'endomorphisme $\varphi + \mathrm{id}_{K_2[X]}$ est-il 1-déplaçant ?

Oui.

Par exemple, $\psi(X) = 2X+1 \notin \mathrm{Vect}(X)$*, ce qui montre que les deux sous-espaces vectoriels* $\mathrm{Vect}(X)$ *et* $\psi[\mathrm{Vect}(X)] = \mathrm{Vect}\big(\psi(X)\big)$ *sont en somme directe.*

(Beaucoup d'autres exemples auraient fonctionné...)

Partie II. Généralités sur les sous-espaces vectoriels déplacés.

6. Montrer que le noyau $\ker u$ est déplacé par u.

   Fort zérologiquement, $u\big[\ker u\big] = \{0_E\}$ *est en somme directe avec tous les sous-espaces vectoriels de* E.

7. Montrer que $\operatorname{im} u$ est déplacé par u si et seulement si $u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

   Sens direct. *Supposons que* $\operatorname{im} u$ *soit déplacé par* u.

   Soit $x \in E$. *L'élément* $u^2(x) = u\big(u(x)\big)$ *appartient à la fois à* $\operatorname{im} u$ *(car* $u(x) \in E$*) et à* $u\big[\operatorname{im} u\big]$ *(car* $u(x) \in \operatorname{im} u$*). Comme ces deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe, on a* $u^2(x) = 0_E$.

   On a donc montré $\forall x \in E, u^2(x) = 0_E$, *ce qui montre* $u^2 = 0$.

   Sens réciproque. *Supposons* $u^2 = 0$.

   Pour tout $y \in \operatorname{im} u$, *on peut trouver* $x \in E$ *tel que* $y = u(x)$. *On en déduit* $u(y) = u^2(x) = 0_E$. *Cela montre* $u\big[\operatorname{im} u\big] = \{0_E\}$, *ce qui montre que* $\operatorname{im} u$ *est déplacé, avec le même plaisir zérologique qu'à la question précédente.*

8. Soit $\lambda \in K$. Quels sont les sous-espaces vectoriels de E déplacés par l'homothétie $\lambda \operatorname{id}_E$?

   - *Si* $\lambda = 0$, *tout sous-espace vectoriel* V *de* E *vérifie* $u[V] = \{0_E\}$, *donc est déplacé.*
   - *En revanche, si* $\lambda \neq 0$, *seul le sous-espace vectoriel nul* $\{0_E\}$ *est déplacé.*
     - *Il est clair qu'il l'est.*
     - *Si* V *est un sous-espace vectoriel non nul, il contient un élément non nul* x. *Le vecteur* $\lambda x = u(x)$ *appartient alors à la fois à* V *et à* $u[V]$, *ce qui montre que* V *ne saurait être déplacé.*

9. **Interprétation matricielle.**

   (a) On suppose qu'il existe une base $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ de E telle que $M = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 0_k & (*) \\ (*) & (*) \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que $\forall i, j \in [\![1, k]\!], [M]_{i,j} = 0$.

   Construire un sous-espace vectoriel de E de dimension k déplacé par u.

   Notons $V = \operatorname{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$ *et* $W = \operatorname{Vect}(v_{k+1}, \ldots, v_n)$. *Notons que ces deux sous-espaces vectoriels de* E *sont supplémentaires.*

   La forme de la matrice montre que $\forall j \in [\![1, k]\!], u(v_j) \in W$, *ce qui entraîne* $\forall x \in V, u(x) \in W$, *c'est-à-dire* $u[V] \subseteq W$.

   Comme V *et* W *sont supplémentaires, cela entraîne que* V *et* $u[V]$ *sont en somme directe, et donc que* V *est déplacé.*

   Comme $(v_1, \ldots, v_k)$ *est libre, c'est une base de* V, *donc* $\dim V = k$.

   (b) Réciproquement, supposons pouvoir trouver un sous-espace vectoriel V de E de dimension k déplacé par u.

   i. Construire une base $(v_1, \ldots, v_k)$ de V et $\ell \in [\![0, k]\!]$ tels que $\big(v_1, \ldots, v_k, u(v_1), \ldots, u(v_\ell)\big)$ soit une base de $V \oplus u[V]$.

   Notons $\ell = \dim V - \dim\big(\ker(u) \cap V\big)$.

   Fixons un supplémentaire S *de* $\ker u \cap V$ *dans* V, *qui est donc de dimension* ℓ.

   On se donne alors une base $(v_1, \ldots, v_\ell)$ *de* S *et une base* $(v_{\ell+1}, \ldots, v_k)$ *de* $\ker u \cap V$. *La concaténation* $(v_1, \ldots, v_k)$ *des deux est donc une base de* $S \oplus \big(\ker u \cap V\big) = V$.

La forme géométrique du théorème du rang (appliqué à la restriction de u à V) dit que u induit un isomorphisme entre S et $u[V]$. En particulier, la famille-image $\big(u(v_1), \dots, u(v_\ell)\big)$ est une base de $u[V]$.

Comme V est déplacé, la concaténation $\big(v_1, \dots, v_k, u(v_1), \dots, u(v_\ell)\big)$ est donc une base de $V \oplus u[V]$.

ii. En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 0_k & (*) \\ (*) & (*) \end{pmatrix}$.

Complétons la famille précédente en une base $\mathscr{B}$ de E, et montrons que cette base possède la propriété de l'énoncé.

On va montrer† que $\big(u(v_1), \dots, u(v_\ell)\big)$ est une base de $u[V]$.

Il est déjà clair que cette famille est une famille libre de $u[V]$. Par ailleurs, comme la famille de la question précédente possède $k + \ell$ vecteurs et qu'elle est une base de $V \oplus u[V]$, on a bien $\dim V + \dim u[V] = k + \ell$, si bien que $\dim u[V] = \ell$.

La famille de ℓ vecteurs $\big(u(v_1), \dots, u(v_\ell)\big)$ est alors automatiquement une base de $u[V]$, si bien que $u[V] = \mathrm{Vect}\big(u(v_1), \dots, u(v_\ell)\big)$.

En particulier, pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, le vecteur $u(v_j)$ appartient à $u[V]$, si bien que la j-ème colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ ne possède des coefficients non nuls qu'aux lignes de numéro compris entre $k + 1$ et $k + \ell$.

En particulier, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ a la forme voulue.

Partie III. Bornes de Sourour.

Dans toute cette partie, on fixe un sous-espace vectoriel V de E de dimension k, et on suppose que V est déplacé par u.

10. **Première majoration.**

(a) En appliquant le théorème du rang à la restriction $u_{|V}$, montrer $\dim u[V] \geqslant k - \dim \ker u$.

On l'a (presque) fait en TD. La restriction $u_{|V} : \begin{cases} V \to E \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$ hérite de la linéarité de u.

- *Un élément $x \in V$ appartient à son noyau si et seulement si $u(x) = 0_E$, c'est-à-dire si et seulement si $x \in \ker u$. Cela montre $\ker u_{|V} = V \cap \ker u$.*
- *L'image de $u_{|V}$ est $\big\{u_{|V}(x) \,\big|\, x \in V\big\} = \big\{u(x) \,\big|\, x \in V\big\} = u[V]$.*

Ainsi, la formule du rang pour cette application est

$$u[V] = \dim V - \dim\big(V \cap \ker u\big) = k - \dim\big(V \cap \ker u\big).$$

Il suffit alors de remarquer que $V \cap \ker u \subseteq \ker u$, et donc que $\dim\big(V \cap \ker u\big) \leqslant \dim \ker u$, pour obtenir l'inégalité demandée.

(b) En déduire $k \leqslant n - \dfrac{1}{2} \operatorname{rg} u$.

Comme V est déplacé, V et $u[V]$ sont en somme directe. On en déduit que

$$n = \dim E \geqslant \dim\big(V \oplus u[V]\big) = \dim V + \dim u[V] \geqslant k + \big(k - \dim \ker u\big).$$

†. Avec la construction réalisée à la question précédente, on le sait déjà. Mais je rédige ici une démonstration qui ne s'appuie pas sur les détails de cette construction mais simplement sur l'énoncé de la question précédente. C'est dans doute le signe que l'énoncé aurait pu être mieux rédigé.

Cela donne $2k \leqslant n + \dim\ker u = 2n - \mathrm{rg}(u)$, *en utilisant une fois de plus la formule du rang, cette fois pour* u.

L'inégalité demandée s'obtient alors en divisant par 2 de part et d'autre.

11. **Deuxième majoration.**

(a) Construire une base $(v_1, \ldots, v_\ell, v_{\ell+1}, \ldots, v_k)$ de V (pour un certain entier $\ell \in [\![0, k]\!]$) telle que $(v_1, \ldots, v_\ell)$ soit une base de $V \cap \ker u$.

C'est presque du cours (construction d'une base adaptée à un sous-espace vectoriel) : on fixe une base $(v_1, \ldots, v_\ell)$ *de* $V \cap \ker u$. *Elle est* a fortiori *une famille libre de* V, *que l'on peut compléter en une base de* V.

(b) Montrer que $\big(v_1, \ldots, v_\ell, u(v_{\ell+1}), \ldots, u(v_k)\big)$ est libre.

Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K$ *tels que* $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_\ell v_\ell + \alpha_{\ell+1} u(v_{\ell+1}) + \cdots + \alpha_k u(v_k) = 0_E$.

On peut réécrire cette relation

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_\ell v_\ell}_{=:w} = -u\left(\alpha_{\ell+1} v_{\ell+1} + \cdots + \alpha_k v_k\right),$$

ce qui montre que le vecteur w *appartient à la fois à* V *et à* $u[V]$. *Comme ces deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe, on a donc* $w = 0_E$.

Par liberté de $(v_1, \ldots, v_\ell)$, *cela démontre déjà que* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_\ell = 0$.

Par ailleurs, le fait que $w = 0_E$ *montre que* $\alpha_{\ell+1} v_{\ell+1} + \cdots + \alpha_k v_k \in V \cap \ker u$. *Mais la construction de la famille* $(v_1, \ldots, v_k)$ *montre que* $V \cap \ker u = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_\ell)$ *et* $\mathrm{Vect}(v_{\ell+1}, \ldots, v_k)$ *sont en somme directe, donc on a en fait* $\alpha_{\ell+1} v_{\ell+1} + \cdots + \alpha_k v_k = 0_E$, *donc* $\alpha_{\ell+1} = \cdots = \alpha_k = 0$, *par liberté de* $(v_{\ell+1}, \ldots, v_k)$.

(c) En déduire $k \leqslant \dim(\ker u + \mathrm{im}\, u)$.

La famille précédente est libre, et elle est manifestement composée de vecteurs de $\ker u + \mathrm{im}\, u$ *(chacun des vecteurs de la famille appartient au noyau ou à l'image de* u*, par construction).*

On conclut en se rappelant que la taille d'une famille libre dans un espace vectoriel de dimension finie est majorée par la dimension.

12. **Troisième majoration.** Montrer que, pour tout scalaire $\lambda \neq 0$, on a $k \leqslant \mathrm{rg}(u - \lambda\, \mathrm{id}_E)$.

Soit $\lambda \in K \setminus \{0\}$.

Montrons que V *et* $E_\lambda(u) := \ker(u - \lambda\, \mathrm{id}_E)$ *sont en somme directe. Soit* $v \in V \cap E_\lambda(u)$.

Le vecteur $v = \dfrac{1}{\lambda} u(v)$ *appartient simultanément à* V *et à* $u[V]$, *donc il est nul.*

On en déduit que $\dim E \geqslant \dim\big(V \oplus E_\lambda(u)\big) = \dim V + \dim\ker(u - \lambda\, \mathrm{id}_E)$, *c'est-à-dire la majoration* $k = \dim V \leqslant \dim E - \dim\ker(u - \lambda\, \mathrm{id}_E) = \mathrm{rg}(u - \lambda\, \mathrm{id}_E)$, *d'après la formule du rang.*

Remarque. Ahmed Sourour a démontré en 1986 que les majorations obtenues dans cette partie sont optimales : si un entier k vérifie les trois inégalités, alors u est k-déplaçant.

Partie IV. Endomorphismes k-universels.

On s'inspire de l'interprétation matricielle donnée à la question 9 pour définir une propriété plus forte que le fait d'être k-déplaçant.

Définition.

L'endomorphisme u est dit k-*universel* si, pour tout $A \in M_k(K)$, il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soit de la forme $\begin{pmatrix} A & (*) \\ (*) & (*) \end{pmatrix}$, c'est-à-dire telle que $\forall i, j \in [\![1, k]\!], [M]_{i,j} = [A]_{i,j}$.

13. Montrer que, si u est k-universel, alors $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$ est k-déplaçant pour tout scalaire $\lambda \in K$.

    Supposons que u est k-universel. Soit $\lambda \in K$.

    Par k-universalité, on peut trouver une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda I_k & (*) \\ (*) & B \end{pmatrix}$, pour une certaine matrice $B \in M_{n-k}(K)$. On en déduit

    $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) - \lambda I_n = \begin{pmatrix} 0_k & (*) \\ (*) & B - \lambda I_{n-k} \end{pmatrix},$$

    ce qui montre que $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$ est k-déplaçant, d'après la question 9.

14. **Finitude du spectre.** Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ quelconque.

    Montrer qu'il existe au plus n scalaires λ tels que $v - \lambda\,\mathrm{id}_E$ ne soit pas inversible.

    Supposons par l'absurde qu'il existe $n+1$ scalaires distincts $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in K$ tels que pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $v - \lambda_j\,\mathrm{id}_E$ ne soit pas inversible.

    Soit $j \in [\![0, n]\!]$. Endomorphisme non inversible en dimension finie, la différence $v - \lambda_j\,\mathrm{id}_E$ n'est pas injective. On peut donc trouver un vecteur non nul x_j dans $\ker(v - \lambda_j\,\mathrm{id}_E)$, ce qui est précisément la définition d'un vecteur propre associé à la valeur propre λ_j.

    Comme ces vecteurs propres sont associés à des valeurs propres distinctes, la famille $(x_0, \dots, x_n)$ est libre d'après un résultat du cours, ce qui contredit le fait que $\dim E = n$.

15. En déduire que, si u est k-universel, alors

    $$k \leqslant \frac{n}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall \lambda \in K, k \leqslant \mathrm{rg}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E).$$

    Supposons que u est k-universel.

    - *D'après la question précédente, comme le corps K contient une infinité d'éléments (ce qui est plus que n...), on peut trouver un scalaire $\lambda \in K$ tel que $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$ soit inversible, et on sait que cet endomorphisme est k-déplaçant.*

      D'après la première majoration de Sourour et la formule du rang, on a donc

      $$k \leqslant n - \frac{1}{2}\,\mathrm{rg}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) = n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}.$$

    - *D'après la troisième majoration de Sourour (qui traite les cas $\lambda \neq 0$), il reste à montrer que $k \leqslant \mathrm{rg}\,u$.*

      Pour cela, on peut remarquer que $u + \mathrm{id}_E$ est k-déplaçant, et appliquer la troisième majoration de Sourour à cet endomorphisme et au scalaire $\lambda = 1$ pour obtenir $k \leqslant \mathrm{rg}\left((u + \mathrm{id}_E) - \mathrm{id}_E\right) = \mathrm{rg}\,u$.

Remarque. En 1984, José Barría et Paul Halmos ont montré que les majorations de la question précédente sont optimales : si un entier k les vérifie, alors u est k-universel. La fin du problème a pour objectif de montrer ce résultat dans un cas particulier mais significatif. C'est surtout un prétexte pour présenter la *réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents*, qui occupe les trois prochaines parties, en suivant un sujet de concours récent (X-ÉNS MP 2025, maths A).

Partie V. Équations différentielles dans $K[X]$.

On considère les endomorphismes de dérivation :

$$D : \begin{cases} K[X] \to K[X] \\ P \mapsto P' \end{cases} \qquad \text{et} \qquad D_n : \begin{cases} K_{n-1}[X] \to K_{n-1}[X] \\ P \mapsto P'. \end{cases}$$

On pourra utiliser sans justification que ce sont des endomorphismes bien définis.

Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_q \in K$ des scalaires **non tous nuls**. Le but de cette partie est de montrer que

$$\forall Q \in K[X], \exists P \in K[X] : \alpha_q P^{(q)} + \cdots + \alpha_1 P' + \alpha_0 P = Q. \qquad (*)$$

16. (a) Exprimer la matrice de l'endomorphisme $\nabla = \alpha_q D_n^q + \cdots + \alpha_1 D_n + \alpha_0 \,\mathrm{id}_{K_{n-1}[X]}$ dans la base canonique $\mathscr{B}_c$ de $K_{n-1}[X]$.

Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$\nabla(X^j) = \alpha_0 X^j + \alpha_1\, j\, X^{j-1} + \alpha_2\, j(j-1)\, X^{j-2} + \cdots = \sum_{k=0}^{q} \alpha_q\, j(j-1)\cdots(j-k+1)\, X^{j-k},$$

avec la convention (discutable) que tout terme de la forme $0\,X^m$ est le polynôme nul (y compris si $m < 0$), ce qui permet de neutraliser les contributions des termes $k > j$.

On en déduit (en considérant que $\alpha_\ell = 0$ dès que $\ell > q$)

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(\nabla) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & 2\alpha_2 & 6\alpha_3 & \cdots & (n-2)!\,\alpha_{n-2} & (n-1)!\,\alpha_{n-1} \\ & \alpha_0 & 2\alpha_1 & 6\alpha_2 & \cdots & (n-2)\cdots 2\,\alpha_{n-3} & (n-1)\cdots 2\,\alpha_{n-2} \\ & & \alpha_0 & 3\alpha_1 & \cdots & (n-2)\cdots 3\,\alpha_{n-4} & (n-1)\cdots 3\,\alpha_{n-3} \\ & & & \alpha_0 & \cdots & (n-2)\cdots 4\,\alpha_{n-5} & (n-1)\cdots 4\,\alpha_{n-4} \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & (0) & & & \alpha_0 & (n-1)\,\alpha_1 \\ & & & & & & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

(b) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que ∇ soit un automorphisme.

La matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(\nabla)$ est triangulaire supérieure, et tous ses coefficients diagonaux sont égaux à α_0. On en déduit que ∇ est un automorphisme, c'est-à-dire que M est inversible, si et seulement si $\alpha_0 \neq 0$.

(c) On suppose $\alpha_0 \neq 0$. Montrer l'assertion $(*)$.

Soit $Q \in K[X]$. On peut trouver $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $Q \in K_{N-1}[X]$.

D'après le point précédent (appliqué à D_N plutôt qu'à D_n), ∇ est un automorphisme, donc on peut trouver $P \in K_{N-1}[X]$ tel que $\nabla(P) = Q$, ce qui conclut.

17. Montrer $(*)$ dans le cas général où $\alpha_0, \dots, \alpha_q \in K$ sont simplement supposés non tous nuls.

On va rédiger ça de manière extrêmement chic.

En notant ν le plus petit entier tel que $\alpha_\nu \neq 0$, l'énoncé demande de montrer la surjectivité de

$$\alpha_q D^q + \cdots + \alpha_1 D + \alpha_0 \ \mathrm{id}_{K[X]} = \alpha_q D^q + \cdots + \alpha_\nu D^\nu = \underbrace{\left(\alpha_q D^{q-\nu} + \cdots + \alpha_\nu \ \mathrm{id}_{K[X]}\right)}_{=:\widetilde{\nabla}} \circ D^\nu.$$

D'après les questions précédentes, le fait que $\alpha_\nu \neq 0$ montre que l'opérateur $\widetilde{\nabla} \in \mathscr{L}(K[X])$ est surjectif.

Par ailleurs, $D \in \mathscr{L}(K[X])$ est connu pour être surjectif : un antécédent du polynôme $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$ (écrit comme une somme presque nulle) est $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \dfrac{X^{k+1}}{k+1}$ (écrit de la même façon).

Par composition, $\widetilde{\nabla} \circ D^\nu$ est surjectif, ce qui conclut.

Partie VI. Prolongement d'applications linéaires D-compatibles.

On revient au cadre général : E est un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Étant donné un sous-espace vectoriel S stable sous u, une application linéaire $\tau : S \to K[X]$ sera dite D-*compatible* si $\forall x \in S, \tau\big(u(x)\big) = D\big(\tau(x)\big)$.

On fixe désormais :

- un sous-espace vectoriel F de E stable sous u, dont on notera m la dimension, supposée $< n$.
- une base $(e_1, \dots, e_m)$ de F ;
- une application linéaire D-compatible $\tau : F \to K[X]$.

Le but est alors de prolonger τ en une application linéaire D-compatible $\widetilde{\tau} : E \to K[X]$.

À l'aide d'une récurrence forte sur la dimension que l'on ne rédigera pas, il suffit en fait de savoir prolonger τ en une application linéaire D-compatible $\tau_+ : F_+ \to K[X]$, où F_+ est un sous-espace vectoriel de E, stable sous u, contenant strictement F.

Fixons pour cela un vecteur $w \in E \setminus F$.

On note $q \in \mathbb{N}^*$ le plus grand entier tel que $\mathscr{F} = \big(e_1, \dots, e_m, w, u(w), \dots, u^{q-1}(w)\big)$ soit libre.

18. (a) Expliquer rapidement pourquoi q est bien défini.

Toute partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée possède un plus grand élément. Il y a donc deux choses à justifier.

- *D'abord, il existe des entiers $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\big(e_1, \dots, e_m, w, u(w), \dots, u^{q-1}(w)\big)$ soit libre.*

  Pour cela, il suffit de remarquer que $q = 1$ convient. Grâce au lemme de précipitation, le fait que $w \notin E$ montre que la famille $\big(e_1, \dots, e_m, w\big)$ est libre.
- *Ensuite, si un entier q vérifie cette propriété, on a $m + q \leqslant \dim E = n$. Les entiers q possibles sont donc majorés par une certaine quantité, à savoir $n - m = \dim E - \dim F$.*

(b) Montrer qu'il existe $v \in F$ et $\beta_0, \dots, \beta_{q-1} \in K$ tel que $u^q(w) = v + \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j u^j(w)$.

La maximalité de q entraîne que :

- *$\mathscr{F} = \big(e_1, \dots, e_m, w, u(w), \dots, u^{q-1}(w)\big)$ est libre ;*
- *mais $\big(e_1, \dots, e_m, w, u(w), \dots, u^{q-1}(w), u^q(w)\big)$ est liée.*

D'après le lemme de précipitation, on en déduit que

$$\begin{aligned} u^q(w) \in \mathrm{Vect}\big(e_1, \ldots, e_m, w, u(w), \ldots, u^{q-1}(w)\big) \\ &= \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_m) \oplus \mathrm{Vect}\big(w, u(w), \ldots, u^{q-1}(w)\big) \\ &= F \oplus \mathrm{Vect}\big(w, u(w), \ldots, u^{q-1}(w)\big). \end{aligned}$$

Cela garantit l'existence de la décomposition demandée.

(c) En déduire que $F_+ = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est stable sous u.

On sait que $u[F_+] = \mathrm{Vect}\big(u(e_1), \ldots, u(e_m), u(w), u^2(w), \ldots, u^{q-1}(w), u^q(w)\big)$.

- *Par stabilité de* F *sous* u*, on a* $u(e_1), \ldots, u(e_m) \in F_+$ *(il appartiennent même à* F*).*
- *Par définition de* $\mathscr{F}$*, on a* $u(w), u^2(w), \ldots, u^{q-1}(w) \in F_+$.
- *Enfin, la question précédente montre que* $u^q(w) \in F_+$.

Par stabilité par combinaison linéaire, on a donc $u[F_+] \subseteq F_+$*, c'est-à-dire que* F_+ *est stable sous* u.

19. Construire une application linéaire D-compatible $\tau_+ : F_+ \to K[X]$ prolongeant τ.

Indication. On pourra commencer par appliquer intelligemment le résultat de la partie V.

D'après le résultat de la partie V, on peut trouver $P \in K[X]$ *tel que* $P^{(q)} - \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j P^{(j)} = \tau(v)$.

Par propriété universelle des bases, on peut considérer l'application linéaire $\tau_+ : F_+ = \mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \to K[X]$ *envoyant :*

- *pour tout* $i \in [\![1, m]\!]$, e_i *sur* $\tau(e_i)$ *: cela garantit déjà que* τ_+ *prolonge* τ *(la restriction de* τ_+ *et* τ *coïncident sur les* e_i*, donc elles sont égales par prolongement des identités) ;*
- *pour tout* $j \in [\![0, q-1]\!]$, $u^j(w)$ *sur* $P^{(j)}$.

Il reste à démontrer que $\widetilde{\tau}_+$ *est* D*-compatible. Par stabilité par combinaison linéaire, il suffit de vérifier que les éléments de la famille* $\mathscr{F}$ *sont dans le noyau* $K = \ker\big(D \circ \tau_+ - \tau_+ \circ u\big)$.

- *Pour tout* $i \in [\![1, m]\!]$*, on a* $\tau_+(e_i) = \tau(e_i)$ *et* $\tau_+\big(u(e_i)\big) = \tau\big(u(e_i)\big)$*, donc* $e_i \in K$ *car* τ *est* D*-compatible.*
- *Soit* $j \in [\![1, q-1]\!]$.
  - *Si* $j < q-1$*, on a*
    - ▷ $\tau_+\Big(u\big(u^j(w)\big)\Big) = \tau_+\big(u^{j+1}(w)\big) = P^{(j+1)}$ *;*
    - ▷ $D\Big(\tau_+\big(u^j(w)\big)\Big) = D(P^{(j)}) = P^{(j+1)}$*,*

    donc $u^j(w) \in K$.
  - *Reste à traiter le cas* $j = q-1$.
    - ▷ $\tau_+\Big(u\big(u^{q-1}(w)\big)\Big) = \tau_+\big(u^q(w)\big) = \tau_+(v) + \sum_{j=0}^{q-1} \beta_j \tau_+\big(u^j(w)\big) = \tau(v) + \sum_{j=0} \beta_j P^{(j)}$ *;*
    - ▷ $D\Big(\tau_+\big(u^{q-1}(w)\big)\Big) = D\big(P^{(q-1)}\big) = P^{(q)}$.

    Or, la définition de P *dit exactement que ces deux polynômes sont égaux.*

    On en déduit que $u^{q-1}(w) \in K$*, ce qui conclut la démonstration.*

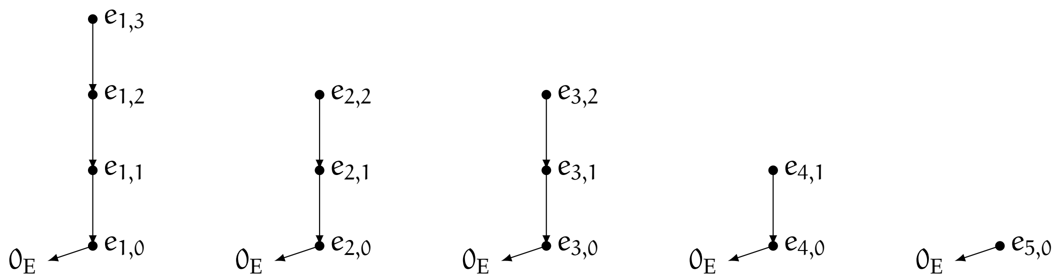
Partie VII. Réduction de Jordan.

Dans cette partie, on suppose l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ *nilpotent*. On fixe même $p \in \mathbb{N}^*$ **minimal** tel que $u^p = 0$. Le but de cette partie est de montrer qu'il existe une base de E particulièrement adaptée à l'endomorphisme nilpotent u.

Plus précisément, étant donné des entiers $d_1, \dots, d_s \geqslant 1$, on appellera *base de Jordan* de E (pour u) une base de E de la forme $(e_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant s\\ 0\leqslant j<d_i}}$ vérifiant les propriétés

$$\forall i \in [\![1, s]\!], \begin{cases} \forall j \in [\![1, d_i - 1]\!], u(e_{i,j}) = e_{i,j-1} \\ u(e_{i,0}) = 0_E \end{cases}$$

illustrées par le dessin suivant, où chaque flèche relie un vecteur à son image par u :

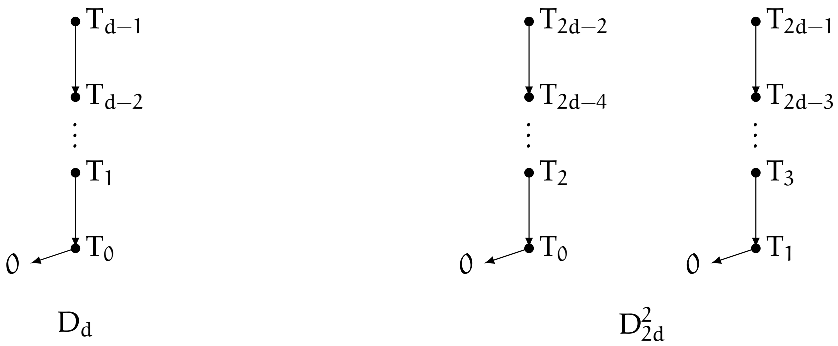


Une base de Jordan correspondant aux entiers $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) = (4, 3, 3, 2, 1)$.

20. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On reprend les notations de la partie V.
    (a) Construire une base de Jordan pour D_d.
    (b) Construire une base de Jordan pour D_{2d}^2.

    On traite les deux sous-questions d'un coup. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, *le caractère échelonné au sens fort montre que la famille « de Taylor »* $(T_j)_{j=0}^{p-1} = \left(\dfrac{X^j}{j!}\right)_{j=0}^{p-1}$ *est une base de* $K_{p-1}[X]$, *et l'effet de* D *sur cette base est clair :* $D(T_0) = 0$ *et* $\forall j \in [\![1, p-1]\!], D(T_j) = T_{j-1}$. *Il s'ensuit :*

    (a) que $(T_0, T_1, \dots, T_{d-1})$ *est une base de Jordan pour* D_d *(avec* $s = 1$ *et* $d = d_1$*) ;*
    (b) que $(T_0, T_2, \dots, T_{2d-2}; T_1, T_3, \dots, T_{2d-1})$ *est une base de Jordan pour le carré* D_{2d}^2 *(avec* $s = 2$ *et* $d_1 = d_2 = d$*).*



La construction d'une base de Jordan se fait par récurrence forte sur la dimension de E. Plutôt que la rédiger *in extenso*, le sujet vous fait rédiger l'étape cruciale d'hérédité : on va trouver une décomposition de E en deux sous-espaces vectoriels **stables sous** u de dimension strictement inférieure à celle de E, dont l'un est en outre muni d'une base de Jordan.

21. Montrer qu'il existe $v \in E$ tel que $u^{p-1}(v) \neq 0_E$ et que $\mathscr{V} = \big(v, u(v), \dots, u^{p-1}(v)\big)$ est libre.

    S'il n'existait pas de tel vecteur v*, on aurait* $\forall v \in E, u^{p-1}(v) = 0_E$*, c'est-à-dire* $u^{p-1} = 0$*, ce qui contredirait la minimalité de* p*.*

    La démonstration de la liberté de $\mathscr{V}$ *a été faite en TD. Je ne la recopie pas ici.*

22. Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathscr{V})$ est un sous-espace vectoriel stable sous u et qu'il possède une base de Jordan.

    Il suffit de vérifier que $\forall j \in [\![0, p-1]\!], u\big(u^j(v)\big) \in \mathrm{Vect}(\mathscr{V})$*.*

    Pour $j < p-1$*, c'est évident car* $u\big(u^j(v)\big) = u^{j+1}(v)$ *est un élément de la famille* $\mathscr{V}$*.*
    Pour $j = p-1$*, cela provient simplement de* $u^p(v) = 0_E$*.*

    Il est par ailleurs clair que $(u^{p-1}(v), u^{p-2}(v), \dots, u(v), v)$ *est une base de Jordan pour* u*.*

23. Construire une application linéaire injective et D-compatible $\tau : \mathrm{Vect}\big(\mathscr{V}\big) \to K[X]$.

    On va reprendre la notation d'une question précédente, en notant pour tout $j \in \mathbb{N}$*,* $T_j = \dfrac{X^j}{j!}$*.*

    Comme $\mathscr{V}$ *est une base de* $\mathrm{Vect}(\mathscr{V})$*, on peut définir une application linéaire* $\tau : \mathrm{Vect}(\mathscr{V}) \to K[X]$ *en imposant que* $\forall j \in [\![0, p-1]\!], \tau(u^j(v)) = T_{p-1-j}$*.*

    Cette application linéaire envoie $(u^{p-1}(v), u^{p-2}(v), \dots, u(v), v)$ *sur* $(T_0, T_1, \dots, T_{p-1})$ *qui est une base de* $K_{p-1}[X]$ *en tant que famille échelonnée au sens fort.* A fortiori*, elle est libre. Cela démontre l'injectivité de* τ*.*

    Enfin, soit $j \in [\![0, p-1]\!]$*.*

    - *Si* $j < p-1$*, on a*
        - $\tau\Big(u\big(u^j(v)\big)\Big) = \tau\big(u^{j+1}(v)\big) = T_{p-j-2}$*;*
        - $D\Big(\tau\big(u^j(v)\big)\Big) = D(T_{p-1-j}) = T_{p-j-2}$*.*
    - *Si* $j = p-1$*, on a*
        - $\tau\Big(u\big(u^{p-1}(v)\big)\Big) = \tau(0) = 0$*;*
        - $D\Big(\tau\big(u^{p-1}(v)\big)\Big) = D(T_0) = D(1) = 0$*.*

    Ces calculs montrent que les deux applications linéaires $\tau \circ u$ *et* $D \circ \tau$ *coïncident sur les vecteurs de* $\mathscr{V}$*. Par prolongement des identités, elles sont égales, c'est-à-dire que* τ *est* D*-compatible.*

24. On peut prolonger τ en une application linéaire D-compatible $\widetilde{\tau} : E \to K[X]$, en appliquant le résultat de la partie précédente.

    Montrer que les deux applications linéaires τ et $\widetilde{\tau}$ ont la même image, que l'on précisera.

    L'application τ *que l'on a définie vérifie* $\mathrm{im}\,\tau = \mathrm{Vect}(T_0, \dots, T_{p-1}) = K_{p-1}[X]$*. (On aurait pu la définir autrement, mais il est facile de se convaincre, en suivant la suite du raisonnement, que cela n'aurait pas changé* $\mathrm{im}\,\tau$*.)*

    Comme $\widetilde{\tau}$ *prolonge* τ*, il est clair que* $\mathrm{im}\,\tau \subseteq \mathrm{im}\,\widetilde{\tau}$*. Il n'y a qu'à montrer l'implication réciproque, c'est-à-dire que* $\mathrm{im}\,\widetilde{\tau} \subseteq K_{p-1}[X]$*.*

    Soit $Q \in \mathrm{im}\,\widetilde{\tau}$*. On peut donc trouver* $x \in E$ *tel que* $Q = \widetilde{\tau}(x)$*.*

    La relation $D \circ \widetilde{\tau} = \widetilde{\tau} \circ u$ *et une petite récurrence montrent que* $\forall j \in \mathbb{N}, D^j \circ \widetilde{\tau} = \widetilde{\tau} \circ u^j$*. En particulier,* $D^p \circ \widetilde{\tau} = \widetilde{\tau} \circ u^p = 0$*.*

    Ainsi, $Q^{(p)} = D^p(Q) = \big(D^p \circ \widetilde{\tau}\big)(x) = 0$*. D'après l'effet de la dérivation sur le degré, cela montre* $\deg Q < p$*, c'est-à-dire* $Q \in K_{p-1}[X]$*.*

25. Montrer que $S = \ker \widetilde{\tau}$ est un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(\mathscr{V})$, stable sous u.

- *Soit* $x \in S \cap \mathrm{Vect}(\mathscr{V})$.

  Vu la définition de S, *on a* $\widetilde{\tau}(x) = 0$. *Comme* $x \in \mathrm{Vect}(\mathscr{V})$, *cela signifie* $\tau(x) = 0$. *Mais l'application linéaire* τ *est injective, donc* $x = 0_E$.

  Cela montre déjà que S *et* $\mathrm{Vect}(\mathscr{V})$ *sont en somme directe.*
- *On sait que* $\mathscr{V}$ *est de dimension* p.

  D'après la formule du rang, on a par ailleurs $\dim S = \dim \ker \widetilde{\tau} = n - \mathrm{rg}\, \widetilde{\tau} = n - p$, *car on vient de montrer que* $\mathrm{im}\, \widetilde{\tau} = K_{p-1}[X]$.

  Les deux sous-espaces vectoriels S *et* $\mathrm{Vect}(\mathscr{V})$ *sont donc en somme directe et la somme de leurs dimensions vaut* n, *donc ils sont bel et bien supplémentaires dans* E.
- *Reste à montrer que* S *est stable sous* u. *Soit* $x \in S$. *On a*

$$\widetilde{\tau}\big(u(x)\big) = D\big(\widetilde{\tau}(x)\big) = D(0) = 0,$$

  donc $u(x) \in \ker \widetilde{\tau} = S$.

Partie VIII. Un cas particulier de la construction de Barría et Halmos.

Dans cette partie, on suppose que u est nilpotent et qu'il possède une base de Jordan $(e_i)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant s \\ 0 \leqslant j < d_i}}$ « sans bloc de taille 1 » [‡], c'est-à-dire pour des entiers $d_1, \dots, d_s$ tous supérieurs ou égaux à 2.

26. Montrer que, pour tout $\lambda \in K^*$, $\dfrac{n}{2} \leqslant \mathrm{rg}(u) < \mathrm{rg}(u - \lambda\, \mathrm{id}_E)$.

La description de la base de Jordan montre directement :

- *que, pour tout* $i \in [\![1, s]\!]$, $e_{i,0} \in \ker u$, *si bien que* $\dim \ker u \geqslant s$ *;*
- *que, pour tout* $i \in [\![1, s]\!]$ *et tout* $j \in [\![0, d_i - 2]\!]$, $e_{i,j} \in \mathrm{im}\, u$, *si bien que*

$$\mathrm{rg}\, u \geqslant \sum_{i=1}^{s} (d_i - 1) = \sum_{i=1}^{s} d_i - s = n - s.$$

D'après le théorème du rang, on doit par ailleurs avoir $\dim \ker u + \mathrm{im}\, u = n$, *si bien qu'aucune des deux inégalités précédentes ne peut se permettre d'être stricte. On a donc bien* $\mathrm{rg}\, u = n - s = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} (d_i - 1)$.

Par ailleurs, pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, *on a* $d_i \geqslant 2$ *donc* $d_i - 1 \geqslant \dfrac{d_i}{2}$ *et* $\mathrm{rg}\, u = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} (d_i - 1) \geqslant \sum_{i=1}^{s} \frac{d_i}{2} = \frac{n}{2}$.

Pour conclure, fixons $\lambda \in K^*$ *et montrons* $\mathrm{rg}(u - \lambda\, \mathrm{id}_E) = n$, *c'est-à-dire que* $u - \lambda\, \mathrm{id}_E$ *est un automorphisme.*

Pour cela, fixons $x \in \ker(u - \lambda\, \mathrm{id}_E)$, *si bien que* $u(x) = \lambda x$. *Au prix d'une petite récurrence, on montre* $\forall k \in \mathbb{N}, u^k(x) = \lambda^k x$, *si bien que* $0_E = u^p(x) = \lambda^p x$.

Comme $\lambda \neq 0$, *on a* $\lambda^p \neq 0$, *donc* $x = 0_E$, *ce qui conclut.*

Les inégalités obtenues à la partie IV montrent donc que, si u est k-universel, alors $k \leqslant \dfrac{n}{2}$.

Réciproquement, on pose dans la fin du problème $k = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$, et on va montrer que u est k-universel.

‡. Cette condition supplémentaire équivaut en fait à l'égalité $\dim \ker u^2 = 2 \dim \ker u$.

27. **Construction d'une famille « superlibre ».** Dans cette question, on va construire une famille $\mathscr{Z} = (z_1, \ldots, z_k)$ de vecteurs de E telle que $\mathscr{Z}^+ = \big(z_1, \ldots, z_k, u(z_1), \ldots, u(z_k)\big)$ soit libre, d'abord dans deux cas particuliers, puis dans le cas général.

   (a) **Cas d'un seul bloc.** Construire une telle famille $\mathscr{Z}$ dans le cas où $s = 1$ (et donc $d_1 = n$).

   - *Si n est impair, on a $n = 2k+1$. Si l'on pose $\mathscr{Z} = (e_{1,n-2}, e_{1,n-4}, \ldots, e_{1,3}, e_{1,1})$, qui est bien une famille de taille k, la famille $\mathscr{Z}^+$ est*

   $$(e_{1,n-2}, e_{1,n-4}, \ldots, e_{1,3}, e_{1,1}, e_{1,n-3}, e_{1,n-5}, \ldots, e_{1,2}, e_{1,0}),$$

   qui n'est rien d'autre qu'une permutation d'une sous-famille de la base de Jordan. À ce titre, elle est libre.
   - *Si n est pair, on a $n = 2k$ et la famille $\mathscr{Z} = (e_{1,n-1}, e_{1,n-3}, \ldots, e_{1,3}, e_{1,1})$ convient, pour les mêmes raisons ($\mathscr{Z}^+$ est même une permutation de la base de Jordan tout entière).*

   (b) **« Suture » de deux blocs impairs.** Construire une telle famille $\mathscr{Z}$ dans le cas où $s = 2$ et où les deux entiers d_1 et d_2 sont impairs (et donc $\geqslant 3$).

   C'est plus pénible !

   Fixons $p, q \geqslant 1$ tels que $d_1 = 2p+1$ et $d_2 = 2q+1$, si bien que $n = d_1 + d_2 = 2p+2q+2$ et $k = p+q+1$. On pose alors par exemple

   $$\mathscr{Z} = (\underbrace{e_{1,2p},\ e_{1,2p-2},\ \ldots,\ e_{1,4},\ e_{1,2}}_{p \text{ vecteurs}},\ e_{1,1} + e_{2,2q},\ \underbrace{e_{2,2q-1},\ e_{2,2q-3},\ \ldots,\ e_{2,3},\ e_{2,1}}_{q \text{ vecteurs}}).$$

   Si on applique u aux vecteurs de cette famille, on obtient donc

   $$(e_{1,2p-1},\ e_{1,2p-3},\ \ldots,\ e_{1,3},\ e_{1,1},\ e_{1,0} + e_{2,2q-1},\ e_{2,2q-2},\ e_{2,2q-4},\ \ldots,\ e_{2,2},\ e_{2,0}).$$

   Ainsi, la concaténation $\mathscr{Z}^+$ des deux familles contient :

   - *tous les vecteurs $e_{1,j}$, à l'exception du « dernier », $e_{1,0}$;*
   - *tous les vecteurs $e_{2,j}$, à l'exception du « premier », $e_{2,2q}$;*
   - *les deux vecteurs $e_{1,1} + e_{2,2q}$ et $e_{1,0} + e_{2,2q-1}$.*

   Grâce aux deux derniers vecteurs, on voit que les vecteurs de base « manquant » $e_{1,0}$ et $e_{2,2q}$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(\mathscr{Z}^+)$. Cela montre que $\mathscr{Z}^+$ est génératrice de E. Comme elle contient $2k = n$ vecteurs, elle est une base de E, ce qui montre sa liberté.

   (c) **Cas général.** Construire enfin la famille $\mathscr{Z}$ dans le cas général.

   On gardera la terminologie suggérée par le titre de la question précédente : une famille $\mathscr{Z}$ possédant la propriété définie dans cette question sera dite super-libre.

   On essaye, tant que c'est possible, de regrouper deux par deux les entiers i tels que d_i soit impair. À la fin de cette opération, on dispose donc d'un recouvrement disjoint de $[\![1, s]\!]$ en :

   - *un certain nombre de paires $\{i, j\}$ d'indices tels que d_i et d_j soient impairs ;*
   - *un certain nombre de singletons $\{k\}$ tels que d_k soit pair ;*
   - *éventuellement, un unique singleton $\{\ell\}$ tel que d_ℓ soit impair (cela se produit si et seulement si n est impair).*

   Les deux questions précédentes permettent de construire :

   - *pour chaque paire $\{i, j\}$, une famille superlibre $\mathscr{Z}_{i,j}$ de $\dfrac{d_i + d_j}{2}$ vecteurs appartenant au sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_{i,d_i-1}, \ldots, e_{i,0}, e_{j,d_j-1}, \ldots, e_{j,0})$;*

- *pour chaque singleton* $\{k\}$ *avec* d_k *pair, une famille super-libre* $\mathscr{Z}_k$ *de* $\dfrac{d_k}{2}$ *vecteurs appartenant au sous-espace vectoriel* $\mathrm{Vect}(e_{k,d_k-1}, \ldots, e_{k,0})$ *;*
- *si* n *est impair, une famille superlibre* $\mathscr{Z}_\ell$ *de* $\dfrac{d_\ell - 1}{2}$ *vecteurs de* $\mathrm{Vect}(e_{\ell,d_\ell-1}, \ldots, e_{\ell,0})$.

On vérifie alors (je nous épargne les détails) que la concaténation de toutes ces familles reste super-libre. Son nombre de vecteurs est :

- $\displaystyle \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{s} d_t = \frac{n}{2}$ *si* n *est pair ;*
- $\displaystyle \frac{1}{2}\sum_{\substack{t\in[\![1,s]\!] \\ t\neq \ell}} d_t + \frac{d_\ell - 1}{2} = \frac{n-1}{2} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ *si* n *est impair.*

Dans tous les cas, on a trouvé une famille super-libre de k *vecteurs, ce qui nous apporte joie et félicité.*

28. À l'aide de la famille $\mathscr{Z}$ construite à la question précédente, montrer que u est k-universel.

On va montrer que l'existence d'une famille super-libre $\mathscr{Z}$ *de* k *vecteurs suffit à montrer que* u *est* k*-universel. Rédigeons le cas* $k = 2$*, pour plus de légèreté.*

Si on complète $\mathscr{Z}^+ = \big(z_1, z_2, u(z_1), u(z_2)\big)$ *en une base* $\mathscr{B}$*, les égalités peu passionnantes* $u(z_1) = u(z_1)$ *et* $u(z_2) = u(z_2)$ *montrent que la matrice de* u *prend la forme*

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0_2 & (*) & (*) \\ I_2 & (*) & (*) \\ (0) & (*) & (*) \end{pmatrix}.$$

Étant donné $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$*, on définit alors une nouvelle famille de vecteurs* $\mathscr{B}_A$ *de la façon suivante.*

- *On vérifie que* $\big(z_1, z_2, u(z_1) - az_1 - cz_2, u(z_2) - bz_1 - dz_2\big)$ *est une famille engendrant le même sous-espace vectoriel que* $\mathscr{Z}^+$*. À ce titre, elle reste de rang* 4 *et donc libre.*
- *On complète alors cette famille libre en une base* $\mathscr{B}_A$ *de* E*.*

Les égalités tout aussi peu passionnantes

$$u(z_1) = \big(u(z_1) - az_1 - cz_2\big) + az_1 + cz_2 \qquad \textit{et} \qquad u(z_2) = \big(u(z_2) - bz_1 - dz_2\big) + bz_1 + dz_2$$

montrent alors que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_A}(u) = \begin{pmatrix} A & (*) & (*) \\ I_2 & (*) & (*) \\ (0) & (*) & (*) \end{pmatrix},$$

ce qui conclut.