Huitième composition de mathématiques

Durée : *quatre heures.*

*Les documents, calculatrices, etc. sont **interdits**.*

Sauf mention explicite de l'énoncé, toutes vos affirmations doivent être justifiées.

Le sujet est absurdément long. Comme d'habitude, ne vous laissez pas impressionner.

Consignes générales de présentation

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci d'encadrer ou de souligner vos résultats.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.*
- *Les parties trop difficiles à lire de votre copie ne seront pas lues.*

Exercice. Interro de calcul du vendredi.

1. Calculer $\displaystyle\int_1^e x^5 \ln(x)\,dx$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{dx}{e^x + e^{2x}}$.

Problème A. Endomorphismes k-déplaçants et k-universels.

Dans tout ce problème, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et toutes les notions d'algèbre linéaire sont à comprendre avec K comme corps des scalaires.

On se donne un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$.
On fixe également un entier naturel $k \in \mathbb{N}^*$.

Les parties V, VI et VII sont indépendantes de celles qui précèdent.

1. **Question de cours.** Soit V un sous-espace vectoriel de E.

   Montrer que l'image directe $u[V] = \{u(x) \mid x \in V\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

- On dit qu'un sous-espace vectoriel V de E est *déplacé (par* u*)* si V et $u[V]$ sont en somme directe.
- L'endomorphisme u est dit k-*déplaçant* s'il existe un sous-espace vectoriel V de E de dimension k qui est déplacé par u.

Partie I. Un exemple polynomial.

Étant donné un polynôme $P \in K_2[X]$, on définit* $\varphi(P) = X\,P'(X) + P'(X+1)$.

2. Montrer que φ définit un endomorphisme de $K_2[X]$.
3. Calculer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_c}(\varphi)$ de l'endomorphisme dans la base canonique $\mathscr{B}_c = (1, X, X^2)$.
4. (a) Montrer que $\varphi(X^2) \notin \mathrm{Vect}(1, X^2)$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Vect}(1, X^2)$ est déplacé par φ.
   (c) L'endomorphisme φ est donc 2-déplaçant. Est-il 3-déplaçant ?
5. (a) Montrer que $\varphi + \mathrm{id}_{K_2[X]}$ est un automorphisme de $K_2[X]$.
   (b) En déduire que $\varphi + \mathrm{id}_{K_2[X]}$ n'est pas 2-déplaçant.
   (c) L'endomorphisme $\varphi + \mathrm{id}_{K_2[X]}$ est-il 1-déplaçant ?

Partie II. Généralités sur les sous-espaces vectoriels déplacés.

6. Montrer que le noyau $\ker u$ est déplacé par u.
7. Montrer que $\mathrm{im}\, u$ est déplacé par u si et seulement si $u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
8. Soit $\lambda \in K$. Quels sont les sous-espaces vectoriels de E déplacés par l'homothétie $\lambda\,\mathrm{id}_E$?
9. **Interprétation matricielle.**
   (a) On suppose qu'il existe une base $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de E telle que $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 0_k & (*) \\ (*) & (*) \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que $\forall i, j \in [\![1, k]\!], [M]_{i,j} = 0$.

   Construire un sous-espace vectoriel de E de dimension k déplacé par u.

---

*. Pour éviter toute confusion : $P'(X)$ et $P'(X+1)$ **ne sont pas** des multiplications.

(b) Réciproquement, supposons pouvoir trouver un sous-espace vectoriel V de E de dimension k déplacé par u.

  i. Construire une base $(v_1, \dots, v_k)$ de V et $\ell \in [\![0, k]\!]$ tels que $\big(v_1, \dots, v_k, u(v_1), \dots, u(v_\ell)\big)$ soit une base de $V \oplus u[V]$.

  ii. En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soit de la forme $\begin{pmatrix} 0_k & (*) \\ (*) & (*) \end{pmatrix}$.

Partie III. Bornes de Sourour.

Dans toute cette partie, on fixe un sous-espace vectoriel V de E de dimension k, et on suppose que V est déplacé par u.

Les trois questions sont indépendantes.

10. **Première majoration.**
    (a) En appliquant le théorème du rang à la restriction $u_{|V}$, montrer $\dim u[V] \geqslant k - \dim \ker u$.
    (b) En déduire $k \leqslant n - \dfrac{1}{2} \operatorname{rg} u$.
11. **Deuxième majoration.**
    (a) Construire une base $(v_1, \dots, v_\ell, v_{\ell+1}, \dots, v_k)$ de V (pour un certain entier $\ell \in [\![0, k]\!]$) telle que $(v_1, \dots, v_\ell)$ soit une base de $V \cap \ker u$.
    (b) Montrer que $\big(v_1, \dots, v_\ell, u(v_{\ell+1}), \dots, u(v_k)\big)$ est libre.
    (c) En déduire $k \leqslant \dim(\ker u + \operatorname{im} u)$.
12. **Troisième majoration.** Montrer que, pour tout scalaire $\lambda \neq 0$, on a $k \leqslant \operatorname{rg}(u - \lambda \,\mathrm{id}_E)$.

Remarque. Ahmed Sourour a démontré en 1986 que les majorations obtenues dans cette partie sont optimales : si un entier k vérifie les trois inégalités, alors u est k-déplaçant.

Partie IV. Endomorphismes k-universels.

On s'inspire de l'interprétation matricielle donnée à la question 9 pour définir une propriété plus forte que le fait d'être k-déplaçant.

Définition.

L'endomorphisme u est dit k-*universel* si, pour tout $A \in M_k(K)$, il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soit de la forme $\begin{pmatrix} A & (*) \\ (*) & (*) \end{pmatrix}$, c'est-à-dire telle que $\forall i, j \in [\![1, k]\!], [M]_{i,j} = [A]_{i,j}$.

13. Montrer que, si u est k-universel, alors $u - \lambda \,\mathrm{id}_E$ est k-déplaçant pour tout scalaire $\lambda \in K$.
14. **Finitude du spectre.** Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ quelconque.

    Montrer qu'il existe au plus n scalaires λ tels que $v - \lambda \,\mathrm{id}_E$ ne soit pas inversible.
15. En déduire que, si u est k-universel, alors

$$k \leqslant \frac{n}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall \lambda \in K, k \leqslant \operatorname{rg}(u - \lambda \,\mathrm{id}_E).$$

Remarque. En 1984, José Barría et Paul Halmos ont montré que les majorations de la question précédente sont optimales : si un entier k les vérifie, alors u est k-universel. La fin du problème a pour objectif de montrer ce résultat dans un cas particulier mais significatif. C'est surtout un prétexte pour présenter la *réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents*, qui occupe les trois prochaines parties, en suivant un sujet de concours récent (X-ÉNS MP 2025, maths A).

Partie V. Équations différentielles dans $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$.

On considère les endomorphismes de dérivation :

$$D : \begin{cases} K[X] \to K[X] \\ P \mapsto P' \end{cases} \qquad \text{et} \qquad D_n : \begin{cases} K_{n-1}[X] \to K_{n-1}[X] \\ P \mapsto P'. \end{cases}$$

On pourra utiliser sans justification que ce sont des endomorphismes bien définis.

Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_q \in K$ des scalaires **non tous nuls**. Le but de cette partie est de montrer que

$$\forall Q \in K[X], \exists P \in K[X] : \alpha_q P^{(q)} + \cdots + \alpha_1 P' + \alpha_0 P = Q. \qquad (*)$$

16. (a) Exprimer la matrice de l'endomorphisme $\nabla = \alpha_q D_n^q + \cdots + \alpha_1 D_n + \alpha_0 \,\mathrm{id}_{K_{n-1}[X]}$ dans la base canonique $\mathscr{B}_c$ de $K_{n-1}[X]$.

    Une matrice « avec des pointillés » suffisamment claire et lisible suffira.

    (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que ∇ soit un automorphisme.

    (c) On suppose $\alpha_0 \neq 0$. Montrer l'assertion $(*)$.

17. Montrer $(*)$ dans le cas général où $\alpha_0, \dots, \alpha_q \in K$ sont simplement supposés non tous nuls.

Partie VI. Prolongement d'applications linéaires D-compatibles.

On revient au cadre général : E est un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Étant donné un sous-espace vectoriel S stable sous u, une application linéaire $\tau : S \to K[X]$ sera dite D-*compatible* si $\forall x \in S, \tau\big(u(x)\big) = D\big(\tau(x)\big)$.

On fixe désormais :

- un sous-espace vectoriel F de E stable sous u, dont on notera m la dimension, supposée $< n$.
- une base $(e_1, \dots, e_m)$ de F ;
- une application linéaire D-compatible $\tau : F \to K[X]$.

Le but est alors de prolonger τ en une application linéaire D-compatible $\widetilde{\tau} : E \to K[X]$.

À l'aide d'une récurrence forte sur la dimension que l'on ne rédigera pas, il suffit en fait de savoir prolonger τ en une application linéaire D-compatible $\tau_+ : F_+ \to K[X]$, où F_+ est un sous-espace vectoriel de E, stable sous u, contenant strictement F.

Fixons pour cela un vecteur $w \in E \setminus F$.

On note $q \in \mathbb{N}^*$ le plus grand entier tel que $\mathscr{F} = \big(e_1, \dots, e_m, w, u(w), \dots, u^{q-1}(w)\big)$ soit libre.

18. (a) Expliquer rapidement pourquoi q est bien défini.

    (b) Montrer qu'il existe $v \in F$ et $\beta_0, \dots, \beta_{q-1} \in K$ tel que $u^q(w) = v + \displaystyle\sum_{j=0}^{q-1} \beta_j u^j(w)$.

    (c) En déduire que $F_+ = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est stable sous u.

19. Construire une application linéaire D-compatible $\tau_+ : F_+ \to K[X]$ prolongeant τ.

    Indication. On pourra commencer par appliquer intelligemment le résultat de la partie V.

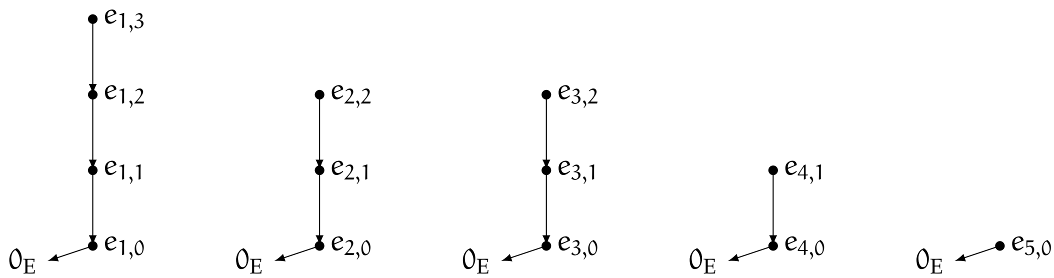
Partie VII. Réduction de Jordan.

Dans cette partie, on suppose l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ *nilpotent*. On fixe même $p \in \mathbb{N}^*$ **minimal** tel que $u^p = 0$. Le but de cette partie est de montrer qu'il existe une base de E particulièrement adaptée à l'endomorphisme nilpotent u.

Plus précisément, étant donné des entiers $d_1, \dots, d_s \geqslant 1$, on appellera *base de Jordan* de E (pour u) une base de E de la forme $(e_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant s\\ 0\leqslant j<d_i}}$ vérifiant les propriétés

$$\forall i \in [\![1, s]\!], \begin{cases} \forall j \in [\![1, d_i - 1]\!], u(e_{i,j}) = e_{i,j-1} \\ u(e_{i,0}) = 0_E \end{cases}$$

illustrées par le dessin suivant, où chaque flèche relie un vecteur à son image par u :



Une base de Jordan correspondant aux entiers $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5) = (4, 3, 3, 2, 1)$.

20. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On reprend les notations de la partie V.
    (a) Construire une base de Jordan pour D_d.
    (b) Construire une base de Jordan pour D_{2d}^2.

La construction d'une base de Jordan se fait par récurrence forte sur la dimension de E. Plutôt que la rédiger *in extenso*, le sujet vous fait rédiger l'étape cruciale d'hérédité : on va trouver une décomposition de E en deux sous-espaces vectoriels **stables sous** u de dimension strictement inférieure à celle de E, dont l'un est en outre muni d'une base de Jordan.

21. Montrer qu'il existe $v \in E$ tel que $u^{p-1}(v) \neq 0_E$ et que $\mathscr{V} = \big(v, u(v), \dots, u^{p-1}(v)\big)$ est libre.
22. Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathscr{V})$ est un sous-espace vectoriel stable sous u et qu'il possède une base de Jordan.
23. Construire une application linéaire injective et D-compatible $\tau : \mathrm{Vect}\big(\mathscr{V}\big) \to K[X]$.
24. On peut prolonger τ en une application linéaire D-compatible $\widetilde{\tau} : E \to K[X]$, en appliquant le résultat de la partie précédente.

    Montrer que les deux applications linéaires τ et $\widetilde{\tau}$ ont la même image, que l'on précisera.
25. Montrer que $S = \ker \widetilde{\tau}$ est un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(\mathscr{V})$, stable sous u.

Partie VIII. Un cas particulier de la construction de Barría et Halmos.

Dans cette partie, on suppose que u est nilpotent et qu'il possède une base de Jordan $(e_i)_{\substack{1\leqslant i\leqslant s\\ 0\leqslant j<d_i}}$ « sans bloc de taille 1 »[†], c'est-à-dire pour des entiers $d_1, \dots, d_s$ tous supérieurs ou égaux à 2.

26. Montrer que, pour tout $\lambda \in K^*$, $\dfrac{n}{2} \leqslant \mathrm{rg}(u) < \mathrm{rg}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)$.

Les inégalités obtenues à la partie IV montrent donc que, si u est k-universel, alors $k \leqslant \dfrac{n}{2}$.

Réciproquement, on pose dans la fin du problème $k = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$, et on va montrer que u est k-universel.

27. **Construction d'une famille « superlibre ».** Dans cette question, on va construire une famille $\mathscr{Z} = (z_1, \dots, z_k)$ de vecteurs de E telle que $\mathscr{Z}^+ = \big(z_1, \dots, z_k, u(z_1), \dots, u(z_k)\big)$ soit libre, d'abord dans deux cas particuliers, puis dans le cas général.
    (a) **Cas d'un seul bloc.** Construire une telle famille $\mathscr{Z}$ dans le cas où $s = 1$ (et donc $d_1 = n$).
    (b) **« Suture » de deux blocs impairs.** Construire une telle famille $\mathscr{Z}$ dans le cas où $s = 2$ et où les deux entiers d_1 et d_2 sont impairs (et donc $\geqslant 3$).
    (c) **Cas général.** Construire enfin la famille $\mathscr{Z}$ dans le cas général.
28. À l'aide de la famille $\mathscr{Z}$ construite à la question précédente, montrer que u est k-universel.

---

†. Cette condition supplémentaire équivaut en fait à l'égalité $\dim\ker u^2 = 2\dim\ker u$.