

Représentation matricielle

Autocorrection A. ✓

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f : (x, y, z) \mapsto (x - z, y, y)$.

- Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.
- Calculer A^2 , A^3 et A^4 . En déduire une formule probable pour A^n , puis la démontrer, par récurrence.
- En déduire l'expression de f^n .

Autocorrection B. ✓

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .
- Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $\Delta(P) = P + P'$.

Déterminer la matrice de Δ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

En déduire que Δ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et résoudre l'équation $\Delta(P) = 1 + X + 2X^2$.

Autocorrection C. ✓

- Montrer que $\mathcal{C} = ((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 1))$ et $\mathcal{D} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ sont des bases de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$, respectivement.
- Déterminer les coordonnées du vecteur $u = (1, -2, 5, 6)$ dans la base $\mathcal{C}$
 - en résolvant un système linéaire ;
 - en calculant la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ vers la base canonique.
- Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \mapsto & (x - 2y + 2z + 5t, x - 2y + 3z + 4t, -x + 2z - 3t). \end{cases}$$

- Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.
- Déterminer la matrice ${}_{\mathcal{D}}[f]_{\mathcal{C}}$.

Exercice 1. ✓

Montrer que les applications linéaires suivantes sont bien définies et déterminer leurs matrices dans les bases canoniques.

- $\begin{cases} K_3[X] \rightarrow K_5[X] \\ P \mapsto 2X^3P' + P'(X^2) - P(1) ; \end{cases}$
- $\begin{cases} K_3[X] \rightarrow K^2 \\ P \mapsto (P(-1), P'(0) + P''(1)) ; \end{cases}$
- $\begin{cases} K_n[X] \rightarrow K_n[X] \\ P \mapsto XP' ; \end{cases}$
- $\begin{cases} K_n[X] \rightarrow K_n[X] \\ P \mapsto 2P + (X - 1)P' . \end{cases}$

Exercice 2. ✓

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $f_k : x \mapsto x^k e^{\alpha x}$ (que l'on voit comme un élément de $C^\infty(\mathbb{R})$).

- Quelle est la dimension de $E = \text{Vect}(f_0, f_1, \dots, f_n)$?
- Montrer que l'opérateur de dérivation ∂ définit un endomorphisme de E , et que cet endomorphisme est un automorphisme si et seulement si $\alpha \neq 0$.

Exercice 3.

Soit $\mathcal{F} = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \right\}$.

1. Donner une base $\mathcal{B}$ du sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $T : \begin{cases} \mathcal{F} & \rightarrow \mathcal{F} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$ est un endomorphisme de $\mathcal{F}$.
3. Calculer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(T)$ et en déduire que T est un automorphisme de $\mathcal{F}$.

Exercice 4.

Soit $a, b, c, d \in K$. Déterminer la matrice de l'endomorphisme

$$\begin{cases} M_2(K) & \rightarrow M_2(K) \\ M & \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} M \end{cases}$$

dans la base $(E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ de $M_2(K)$. Généraliser.

Exercice 5.

1. Montrer que $f : \begin{cases} K_3[X] & \rightarrow K_3[X] \\ P & \mapsto X^2 P'' + 2XP' \end{cases}$ est un endomorphisme de $K_3[X]$.

Déterminer sa matrice dans la base canonique de $K_3[X]$ et en déduire $\ker(f)$ et $\text{im}(f)$.

2. L'application $g : \begin{cases} K_2[X] & \rightarrow K_2[X] \\ P & \mapsto (X^2 - 1)P' - (2X + 1)P \end{cases}$ est-elle un automorphisme?

Exercice 6.

Soit E un espace vectoriel de dimension n , et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

On se donne un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ et on calcule $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Déterminer quelles propriétés de f traduisent le fait que M présente les formes suivantes (quand une matrice est présentée « par blocs »), il sera toujours sous-entendu que le premier « paquet » de lignes (resp. de colonnes) est composé de r lignes (resp. colonnes).

- (i) $M = 0_{M_n(K)}$;
- (ii) $M = I_n$;
- (iii) $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$;
- (iv) $\text{rg } M = r$;

$$(v) \quad M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix};$$

$$(vi) \quad M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{array} \right);$$

$$(vii) \quad M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{array} \right);$$

$$(viii) \quad M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{array} \right).$$

Exercice 7⁺ (Interpolation de Lagrange et matrice de Vandermonde). ✓

1. Soit $x_0, \dots, x_n \in K$ distincts et $\varphi : \begin{cases} K_n[X] \rightarrow K^{n+1} \\ P \mapsto (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)). \end{cases}$

Montrer que φ est un isomorphisme.

2. En déduire que la *matrice de Vandermonde*

$$V(x_0, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \in M_{n+1}(K)$$

est inversible.

Exercice 8⁺. 💡✓

Soit E un espace vectoriel de dimension n .

- Montrer que n est pair si et seulement si $\exists f \in \mathcal{L}(E) : \text{im } f = \ker f$.
- On suppose n pair. Montrer que pour $f \in \mathcal{L}(E)$, $\text{im } f = \ker f \Leftrightarrow \text{rg } f = n/2$ et $f^2 = 0$.

Changement de bases (et un peu de réduction)

Autocorrection D. ✓

Soit E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme associé dans la base $\mathcal{B}$ à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On pose $e'_1 = e_2 + e_3$, $e'_2 = e_1 - e_2 + e_3$ et $e'_3 = e_1 - e_2$.

- Vérifier que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E .
- Calculer $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
- Déterminer la matrice de passage $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ et son inverse.
- Exprimer A en fonction de D et P .
- En déduire une expression de A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9. _____

Soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$f : (x, y, z) \mapsto (3x - 4y - 2z, 4x - 7y - 4z, -5x + 10y + 6z)$$

$$g : (x, y, z) \mapsto (5x - 8y - 4z, 8x - 15y - 8z, -10x + 20y + 11z).$$

- Montrer que f est un projecteur et trouver une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.
- Montrer que g est une symétrie et trouver une base dans laquelle la matrice de g est diagonale.

Exercice 10. ✓

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice A .

1. Déterminer les espaces propres de f .
2. Déterminer une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est $D = \text{diag}(1, 2)$.
3. On note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base $\mathcal{B}'$.

Déterminer P et P^{-1} et donner l'expression de A en fonction de D , P et P^{-1} .

4. Déterminer A^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. ✓

Soit φ l'application définie pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P) = (X^2 + 2)P'' + (X + 1)P' + P$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner sa matrice dans la base canonique.
2. Déterminer les espaces propres de φ .
3. En déduire une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

Exercice 12. ✓

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. À quelle condition existe-t-il une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = I_n$?
2. À quelle condition existe-t-il deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E telle que ${}_c[f]_{\mathcal{B}} = I_n$?

Exercice 13⁺. ? ✓

1. Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.
2. Soit $A \in T_n^+(K)$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $B \in T_n^+(K)$ semblable à A et dont tous les coefficients hors-diagonale sont, en module, inférieurs à ε .
3. Montrer qu'en revanche, il n'existe en général pas de matrice $C \in T_n^+(K)$ semblable à A et dont tous les coefficients diagonaux sont, en module, inférieurs à ε .

Exercice 14. ✓

Soit $a, b, c, d \in K$. On note $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M et N soient semblables.

Exercice 15. ✓

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2 et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que $u^2 = -\text{id}_E$.

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 16. ✓

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On définit la *trace* de f comme $\text{tr } f = \text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$, où $\mathcal{B}$ est une base de E . Montrer que cette quantité est bien définie, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$.
2. Soit $\pi \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

(a) En travaillant avec une base intelligente, déterminer $\text{tr}(\pi)$.

(b) Résoudre l'exercice suivant, populaire mais à peu près infaisable sans le contexte.

Montrer que si $M \in M_n(K)$ est telle que $M^2 = M$, alors $\text{tr } M \in \mathbb{N}$.

3. Quel est l'exercice analogue pour les symétries ?

Exercice 17⁺.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(p_k)_{k=0}^n$ une famille d'endomorphismes de E telle que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \operatorname{rg} p_k = k \quad \text{et} \quad \forall k, \ell \in \llbracket 0, n \rrbracket, p_k \circ p_\ell = p_{\min(k, \ell)}.$$

Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p_k) = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ fois}}, 0, \dots, 0).$$

Exercice 18.

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose qu'il existe $\lambda \neq \mu \in K$ tels que $(u - \lambda \operatorname{id}_E) \circ (u - \mu \operatorname{id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Montrer que $E_\lambda(u) \oplus E_\mu(u) = E$.
2. Montrer qu'il existe une base de K^n dans laquelle u s'écrit $\operatorname{diag}(\lambda, \dots, \lambda, \mu, \dots, \mu)$.

Exercice 19⁺.

Montrer que toute matrice de $T_n^+(K)$ est semblable à une matrice de $T_n^-(K)$.

Exercice 20⁺.

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

Soit $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E et donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 21⁺.

Soit E un espace vectoriel de dimension n . Un *drapeau complet* de l'espace E est une famille

$$\{0_E\} = F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq F_n = E$$

de sous-espaces vectoriels inclus les uns dans les autres, tels que $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \dim F_i = i$.

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ *stabilise* le drapeau $(F_i)_{i=0}^n$ si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u[F_i] \subseteq F_i$.

1. Montrer que u stabilise un drapeau complet si et seulement si sa matrice dans une certaine base est triangulaire supérieure.
2. Utiliser l'idée de drapeau complet pour montrer que si $A \in T_n^+(K)$ a tous ses coefficients diagonaux nuls, alors $A^n = 0$.

Exercice 22⁺⁺.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit V un sous-espace vectoriel de E .

1. Montrer que $\dim(V + f[V]) - \dim V = \dim V - \dim(V \cap f^{-1}[V])$.

On dira que V est *hypostable* sous f s'il existe un hyperplan $\check{V}$ de V tel que $f[\check{V}] \subseteq V$.

2. On suppose que V est hypostable mais pas stable.

Montrer que l'hyperplan $\check{V}$ de la définition est unique.

3. On suppose que V est un sous-espace vectoriel strict de E hypostable sous f .

Montrer qu'il existe $\hat{V} \supseteq V$ de dimension $1 + \dim V$ qui est encore hypostable sous f .

4. En déduire que toute matrice de $M_n(K)$ est semblable à une matrice de *Hessenberg*, c'est-à-dire une matrice H telle que $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i > j + 1 \Rightarrow [H]_{i,j} = 0$.

Exercice 23.

1. Soit $A, B \in GL_n(K)$. Montrer que A et B sont semblables si et seulement s'il existe deux matrices $M, N \in M_n(K)$ telles que $A = MN$ et $B = NM$.
2. Le résultat précédent reste-t-il vrai sans hypothèse d'inversibilité?

Exercice 24⁺.

Dans la suite, on fixe $n \geq 2$ et on note, pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{O}(A) = \{P^{-1}AP \mid P \in GL_n(\mathbb{C})\}$ la classe de similitude de A .

1. Déterminer les matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\forall M \in \mathcal{O}(A), [M]_{1,1} = 0$.
2. Déterminer les matrices $A \in M_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\forall M \in \mathcal{O}(A), [M]_{1,2} = 0$.

Exercice 25⁺.

1. Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de $M_2(\mathbb{C})$ sont semblables.
2. Soit $n \geq 2$. On note $\mathcal{P} = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^2 = A\}$.

Montrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{P}$.

Rang des matrices

Autocorrection E.



Calculer le rang des familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$. Sont-elles libres? génératrices? des bases? Compléter celles qui sont libres mais non génératrices en des bases, et extraire des bases de celles qui sont génératrices mais pas libres.

- (i) $((1, 2, 5, 4), (2, 4, 10, 7))$;
- (ii) $((1, 2, 3), (-5, -10, -15))$;
- (iii) $((1, -2, 7), (0, -12, 35), (0, 0, 2))$;
- (iv) $((3, 1, -4, 6), (1, 1, 4, 4), (1, 0, -4, a))$ (en fonction de $a \in \mathbb{R}$).

Autocorrection F.



Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On introduit les vecteurs $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 1)$ et $u_3 = (0, 1, 1)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
3. Sans calculs, déterminer une base de $\ker f$ et une base de $\text{im } f$.

Exercice 26.

$$1. \text{ Soit } J = \sum_{i=1}^n E_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(K).$$

Déterminer le rang, le noyau et l'image de la matrice J , ainsi que l'endomorphisme associé à J dans la base canonique de $K_n[X]$.

2. On suppose par l'absurde qu'il existe $M \in M_{n+1}(K)$ telle que $M^2 = J$.

(a) Déterminer le rang, l'image et le noyau de M .

(b) Montrer que $\ker M$ et $\operatorname{im} M$ ne sont pas en somme directe, et aboutir à une contradiction.

Exercice 27.

Donner les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques, et calculer le rang desdites applications linéaires.

$$(i) \begin{cases} \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3 \\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y, 2x + y) \end{cases};$$

$$(ii) \begin{cases} \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y - z) \end{cases};$$

$$(iii) \operatorname{tr} : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C};$$

$$(iv) \begin{cases} M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C}) \\ M \mapsto M^T \end{cases}.$$

Exercice 28.

$$1. \text{ Soit } a, b \in \mathbb{C}. \text{ Montrer que le rang de } A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ est supérieur ou égal à 2.}$$

Pour quelles valeurs de a et b ce rang vaut-il exactement 2?

2. Soit $a \in \mathbb{C}$. Quel est le rang des matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & a & 3 \\ -4 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} ?$$

Exercice 29.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Montrer que les applications suivantes sont bien définies, linéaires et déterminer leur rang.

$$(i) \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P' \end{cases};$$

$$(iv) \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_4[X] \\ P \mapsto X(P' - P'(0)) \end{cases};$$

$$(ii) \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P^{(r)} \end{cases};$$

$$(v) \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P' - P \end{cases};$$

$$(iii) \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_8[X] \\ P \mapsto (X^4 + 3X^2 - 2X + 7)P \end{cases};$$

$$(vi) \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_{2n}[X] \\ P \mapsto P(X^2) \end{cases}.$$

Exercice 30.

On note $\mathcal{S} = \left\{ f \in C^3(\mathbb{R}) \mid f''' = f' \right\}$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel réel et que $\mathcal{B} = (\text{ch}, \text{sh}, 1)$ en est une base.

(On pourra admettre les résultats sur les équations différentielles vus en cours de physique.)

2. Montrer que $T : \begin{cases} \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S} \\ f \mapsto f + f' \end{cases}$ définit un endomorphisme $T \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$.

3. Calculer $\text{rg } T$.

Exercice 31.

Soit $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ tels que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Combien vaut $\text{rg}(AB)$? En déduire $\text{rg } A$ et $\text{rg } B$.
2. Déterminer $\ker(AB)$ et $\text{im}(AB)$. En déduire $\ker B$ et $\text{im } A$.
3. Que vaut BA ?

Exercice 32.

Déterminer le rang de $A = (\max(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$, puis de $B = (\max(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Exercice 33.

Soit $n \geq 2$. Déterminer le rang de la matrice $(\sin(i + j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Exercice 34.

Montrer que l'ensemble des matrices de rang 1 est $\left\{ x y^T \mid x, y \in K^n \setminus \{0_{K^n}\} \right\}$.

Exercice 35⁺ (Réduction des matrices de rang un).

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ de rang 1, et $v \in K^n$ tel que $\text{im } M = \text{Vect}(v)$.

1. Montrer que si $Mv \neq 0_{K^n}$, alors M est semblable à $\lambda E_{1,1}$, pour un certain $\lambda \in K$.
2. Montrer que si $Mv = 0_{K^n}$, alors M est semblable à $E_{2,1}$.
3. En déduire que $M^2 = \text{tr}(M) M$.

Exercice 36.

Pour $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $\mathcal{R}_r = \{ A \in M_n(K) \mid \text{rg } A = r \}$.

Déterminer le sous-espace vectoriel engendré $\text{Vect}(\mathcal{R}_r)$.

Exercice 37⁺.

Déterminer les $(M, N) \in M_n(\mathbb{C})^2$ telles que $\forall X \in M_n(\mathbb{C}), MXN = 0$.

Exercice 38⁺.

On rappelle que si E est un K -espace vectoriel, son *dual* $E^* = \mathcal{L}(E, K)$ est l'ensemble de ses formes linéaires.

1. Montrer que $\begin{cases} M_n(K) \rightarrow M_n(K)^* \\ A \mapsto (X \mapsto \text{tr}(AX)) \end{cases}$ est un isomorphisme.
2. En déduire que tout hyperplan de $M_n(K)$ contient une matrice inversible.

Exercice 39⁺.

Soit $A \in M_n(K)$. On considère l'endomorphisme $\psi_A : \begin{cases} M_n(K) \rightarrow M_n(K) \\ X \mapsto AXA \end{cases}$.

1. Montrer que ψ_A est un automorphisme de $M_n(K)$ si et seulement si A est inversible.
2. Déterminer le rang de ψ_A en fonction de celui de A .

Mélange**Exercice 40.**

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On dit que f se factorise à travers un espace vectoriel de dimension finie V si l'on peut trouver deux applications linéaires $\alpha \in \mathcal{L}(E, V)$ et $\beta \in \mathcal{L}(V, F)$ telles que $f = \beta \circ \alpha$.

Quelle est la dimension minimale d'un espace vectoriel à travers lequel f se factorise ?

Exercice 41⁺.

ÉNS

Trouver toutes les fonctions $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), f(AB) \leq \min(f(A), f(B)).$$

Exercice 42⁺.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit

$$A(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g = 0\}.$$

1. Montrer que $A(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer que $\dim A(f) = (\dim \ker f)^2$.

Exercice 43⁺ (Théorème de Graham et Pollak).

On fait disputer à n joueurs m matchs de ballon prisonnier : lors du k -ième match, on forme deux équipes : la bleue B_k et la rouge R_k ; ces deux équipes n'ont pas nécessairement le même nombre de joueurs, et tous les joueurs ne jouent pas tous les matchs (mais les équipes sont toujours non vides). On suppose qu'au bout des m matchs, chaque joueur aura affronté chaque autre une et une seule fois.

1. On définit la matrice M_k dont le coefficient $[M_k]_{i,j}$ vaut 1 si, lors du k -ème match, le i -ème joueur était bleu et le j -ème rouge, et 0 dans tous les autres cas. Déterminer son rang.
2. On pose $M = \sum_{k=1}^m M_k$. Calculer $M + M^T$.
3. Montrer que si une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ a un rang $\leq n - 2$, alors il existe un vecteur v non nul, mais dont la somme des coordonnées est nulle, dans le noyau de A .
4. En considérant la fonction $\theta : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ v \mapsto v^T (M + M^T) v \end{cases}$, déduire de ce qui précède que $m \geq n - 1$.
5. Montrer qu'il est possible de remplir la contrainte de l'énoncé pour $m = n - 1$.