Intégration

Exercice 2.

Pour la deuxième question, on pourra s'intéresser à $I + J$...

Exercice 17.

Il s'agit de décomposer en éléments simples $\frac{1}{P'}$, $\frac{1}{XP}$ et $\frac{P''}{P}$, respectivement.

Exercice 28.

On cherchera à appliquer la stricte positivité de l'intégrale à une fonction très judicieusement choisie (en fonction de l'objectif).

Exercice 29.

On pourra commencer par généraliser : si l'inégalité demandée est vraie, étant donné $f \in C^0([0,1])$ (sans hypothèse sur l'intégrale), quelle inégalité obtiendrait-on entre $\int_0^1 f^2$, $\int_0^1 f$, $\min f$ et $\max f$?

Ce résultat généralisé est peut-être plus facile à démontrer !

Exercice 31.

On cherchera à exprimer l'hypothèse en fonction d'une primitive de f.

Exercice 33.

Pour les trois premières questions, on pourra chercher à faire apparaître la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ (et faire quelque chose de comparable pour la dernière).

Exercice 41.

On pourra tracer le graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1+t^2}{2}$ et chercher à l'encadrer entre deux fonctions affines judicieuses.

Exercice 42.

Pour la deuxième intégrale, on pourra s'intéresser aux comportements possibles de

$$F : x \mapsto \int_0^x \sin^2(t)\arctan(t)\,dt$$

au voisinage de $+\infty$, et notamment à la suite $(F(2\pi n + \alpha) - F(2\pi n + \beta))_{n\in\mathbb{N}}$ pour un choix judicieux de α et β.

Exercice 52.

Dans la première question, on ne cherchera pas à calculer l'intégrale, mais on utilisera l'inégalité triangulaire.

Exercice 60.

1. Il s'agit de reconnaître que, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est le carré d'une somme de Riemann.
2. On somme « en gros » la moitié des termes apparaissant dans la suite précédente et ces termes présentent une symétrie $k \leftrightarrow \ell$. Il faut essayer d'exploiter concrètement cette remarque.

Exercice 66.
La formule de Taylor-Young peut suffire, au prix d'une démonstration epsilonesque (pas question de sommer n développements limités à la diable). Les formules de Taylor globales peuvent donner une démonstration plus directe.

Exercice 69.
Dans la première question, on pourra raisonner à partir d'un point où f s'annule, dont on montrera l'existence.

Autocorrection

Autocorrection A.
(Pour gagner de la place, on omet abusivement les $x \mapsto$ en tête des expressions).

(i) $-\dfrac{1}{4}e^{-2x^2} + \kappa\,;$

(ii) $\dfrac{(\ln x)^2}{2} + \kappa\,;$

(iii) $-\arctan(\cos x) + \kappa\,;$

(iv) $\sin(\ln x) + \kappa\,;$

(v) $\dfrac{1}{2\cos^2 x} + \kappa\,;$

(vi) $-\dfrac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + \kappa\,;$

(vii) $\dfrac{\sin^6 x}{6} + \kappa\,;$

(viii) $-\dfrac{1}{80}\cos(5x) + \dfrac{5}{48}\cos(3x) - \dfrac{5}{8}\cos x + \kappa\,;$

(ix) $\tan x - x + \kappa\,;$

(x) $-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(\ln x)^3} + \kappa\,;$

(xi) $\ln|\sin x| + \kappa\,;$

(xii) $\dfrac{1}{3}\ln\left|1 + x^3\right| + \kappa\,;$

(xiii) $-\ln(1 + \cos^2 x) + \kappa\,;$

(xiv) $2\sqrt{\tan x} + \kappa\,;$

(xv) $2\ln\left(1 + \sqrt{x}\right) + \kappa\,;$

(xvi) $\ln x\,(\ln\ln x - 1) + \kappa\,;$

(xvii) $\exp\left(e^x\right) + \kappa\,;$

(xviii) $\arctan(\ln x) + \kappa\,;$

(xix) $2\sqrt{1 + \ln x} + \kappa\,;$

(xx) $-\dfrac{e^{-x}}{5}(\sin 2x + 2\cos 2x) + \kappa\,;$

(xxi) $\dfrac{1}{2}(\sin x\ \operatorname{ch} x - \cos x\ \operatorname{sh} x) + \kappa.$

Autocorrection B.

(i) $e - 2$ (on fait deux IPP, d'abord en dérivant $t \mapsto t^2$ et en primitivant exp, puis en dérivant $t \mapsto t$ et en primitivant exp) ;

(ii) $\dfrac{1}{9}\left(2e^3 + 1\right)$ (on dérive ln et on primitive $t \mapsto t^2$) ;

(iii) $\dfrac{\pi}{3}$ (on dérive $t \mapsto t$ et on primitive $t \mapsto \sin(3t)$) ;

(iv) $\dfrac{4 - 2\sqrt{2}}{3}$ (on dérive $t \mapsto t$ et on primitive $t \mapsto \sqrt{t+1}$) ;

(v) $\dfrac{5}{3}\ln 2 - \ln 3$ (on dérive ln et on primitive $t \mapsto \dfrac{1}{(t+1)^2}$) ;

(vi) $\dfrac{1}{2}$ (on dérive $t \mapsto t^2$ et on primitive $t \mapsto t\,e^{t^2}$) ;

(vii) $\dfrac{\ln 2}{4}$ (on dérive arctan et on primitive $t \mapsto \dfrac{1}{(t+1)^2}$; il reste une fraction rationnelle à décomposer en élements simples, puis à intégrer) ;

(viii) $\dfrac{\pi^2}{4} - 2$ (on dérive $\arcsin^2$ et on primitive 1 ; dans une deuxième IPP, on primitive $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ et on dérive arcsin) ;

(ix) $\dfrac{\ln 2}{3} + \dfrac{\pi}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{2}$ (on primitive $x \mapsto x^2$ et on dérive arctan).

Autocorrection C.

(i) $\dfrac{4-2\sqrt{2}}{3}$ $(u = t+1)$;

(ii) $12 - 4e$ $(x = u^2)$;

(iii) $\dfrac{5}{48}$ $(u = t^2)$;

(iv) $\dfrac{\pi}{2}$ $(x = \cos\theta)$;

(v) $2 - \dfrac{\pi}{2}$ ($t = e^x$ puis $t = u^2 + 1$) ;

(vi) $\dfrac{1+e^{\pi}}{2}$ ($t = e^x$, puis on intègre l'exponentielle complexe $x \mapsto e^{(1+i)x}$) ;

(vii) $\dfrac{\pi}{6}$ $(u = \sqrt{x})$;

(viii) $2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2$ $(u = \ln x)$;

(ix) $\dfrac{\pi}{12}$ $(u = x^3)$;

(x) $\dfrac{\pi}{8}$ ($x = \sin\theta$ ou $x = \cos\theta$, puis linéarisation) ;

(xi) $1 + \ln 2 - \ln(e+1)$ $(u = e^x)$;

(xii) $\dfrac{\pi}{8}$ (on peut commencer par $x = u^4$, puis $u = \sin\theta$ s'impose...) ;

(xiii) $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ $(u = \cos t)$;

(xiv) $\dfrac{7}{2}\ln 2 - \dfrac{3}{2}\ln 3 - \dfrac{1}{2}$ ($t = 1/u$; on peut aussi faire une IPP).

Autocorrection D.

(i) $x \mapsto \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x-5}{x-2}\right| + \kappa$;

(ii) $x \mapsto 2\ln|x-5| - \ln|x-2|$;

(iii) $x \mapsto x + \dfrac{31}{3}\ln|x-5| - \dfrac{7}{3}\ln|x-2| + \kappa$;

(iv) $x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \kappa$;

(v) $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + 4\arctan x + \kappa$;

(vi) $x \mapsto \dfrac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\dfrac{4x+1}{\sqrt{7}}\right) + \kappa$;

(vii) $x \mapsto \dfrac{1}{3-x} + \kappa$;

(viii) $x \mapsto x - \ln\left((x+2)^2\right) - \dfrac{1}{x+2} + \kappa$;

(ix) $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln|x-1| - \dfrac{1}{18}\ln|x+1| - \dfrac{4}{9}\ln|x-2| - \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{x-2} + \kappa$;

(x) $x \mapsto -\frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}|x+1| + \frac{1}{2}\arctan x + \kappa$;

(xi) $x \mapsto -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}|x+1| + \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \kappa$;

(xii) $x \mapsto \frac{1}{2}\arctan(x^2) + \kappa$ (par la méthode brutale, $x \mapsto \frac{1}{2}\Big(\arctan(\sqrt{2}x-1) - \arctan(\sqrt{2}x-1)\Big) + \kappa'$, mais c'est pareil) ;

(xiii) $x \mapsto \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \kappa$.

Autocorrection E.

(i) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1,2\}, \frac{x^3}{(x-1)(x-2)} = x + 3 - \frac{1}{x-1} + \frac{8}{x-2}$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{-1, \pm i\}, \frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1-i}{4}\frac{1}{x-i} + \frac{1+i}{4}\frac{1}{x+i}$.

(iii) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}_4, \frac{x^4+1}{x^4-1} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{i}{2}\frac{1}{x-i} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{i}{2}\frac{1}{x+i}$.

(iv) $\forall x \in \mathbb{C}, \setminus\{1,2,3\}, \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}$.

(v) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 2, \pm i\}, \frac{10x^3}{(x^2+1)(x^2-4)} = \frac{4}{x+2} + \frac{4}{x-2} + \frac{1}{x-i} + \frac{1}{x+i}$.

(vi) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, j, j^2\}, \frac{5}{(x+1)^5 - x^5 - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\frac{1}{x-j} - \frac{\sqrt{3}i}{4}\frac{1}{x-j^2}$.

Autocorrection F.

(i) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus [\![0,n]\!], \frac{1}{x(x-1)\cdots(x-n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\big((-1)^{n-k}\, k!\,(n-k)!\big)^{-1}}{x-k} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{1}{x-k}$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}_n, \frac{x^{n-1}}{x^n-1} = \frac{1}{n}\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{1}{x-\omega}$.

(iii) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \big(\mathbb{U}_{2n} \setminus \mathbb{U}_n\big), \frac{x^n-1}{x^n+1} = 1 + \frac{2}{n}\sum_{\omega \in \mathbb{U}_{2n} \setminus \mathbb{U}_n} \frac{\omega}{x-\omega}$.

Autocorrection G.

(i) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \frac{x^3}{(x-1)^3} = 1 + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 3\}, \frac{1}{(x+1)^2(3-x)} = -\frac{1}{16}\frac{1}{x-3} + \frac{1}{16}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(x+1)^2}$;

(iii) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}, \frac{1}{(x^2-1)(x+1)^2} = \frac{1}{(x-1)(x+1)^3} = \frac{1}{8}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{8}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^3}$;

(iv) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 2\}, \frac{7x^2+4x-4}{x^4-4x^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+2}$;

(v) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0\}, \frac{3x-1}{x^2(x+1)^2} = \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{5}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2}$;

(vi) $\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{2\}, \frac{x^3-1}{(x-2)^2} = x + 4 + \frac{12}{x-2} + \frac{7}{(x-2)^2}$.

Autocorrection H.

Le théorème hors-programme garantit l'existence de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm i\}, \quad \underbrace{\frac{x^4+x+1}{x(x^2+1)^3}}_{=\frac{x^4+1}{x(x^2+1)^3}+\frac{1}{(x^2+1)^3}} \quad = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta x+\gamma}{x^2+1} + \frac{\delta x+\varepsilon}{(x^2+1)^2} + \frac{\zeta x+\eta}{(x^2+1)^3}$$

(l'égalité est donc notamment valable sur $\mathbb{R}^*$). En utilisant l'unicité de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, on en déduit

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm i\}, \begin{cases} \dfrac{x^4+1}{x(x^2+1)^3} = \dfrac{\alpha}{x} + \dfrac{\beta x}{x^2+1} + \dfrac{\delta x}{(x^2+1)^2} + \dfrac{\zeta x}{(x^2+1)^3} \\ \dfrac{1}{(x^2+1)^3} = \dfrac{\gamma}{x^2+1} + \dfrac{\varepsilon}{(x^2+1)^2} + \dfrac{\eta}{(x^2+1)^3}. \end{cases}$$

Coup de chance, la partie paire est déjà un élément simple, donc on a $\gamma = \varepsilon = 0$ et $\eta = 1$.

On utilise alors les techniques classiques sur la première décomposition en éléments simples.

- En « chassant » le x au dénominateur puis en prenant la limite en 0, $\alpha = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4+1}{(x^2+1)^3} = 1$.
- En « chassant » le $(x^2+1)^3$ au dénominateur puis en prenant la limite en i (*whatever it means*), il vient $\zeta i = \lim\limits_{x\to i} \dfrac{x^4+1}{x}$, c'est-à-dire $\zeta i = \dfrac{2}{i}$, c'est-à-dire $\zeta = -2$.
- En considérant la limite de $x \mapsto x f(x)$ en $+\infty$, il vient $1+\beta = 0$, c'est-à-dire $\beta = -1$.

À ce stade, on a

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm i\}, \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^3} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{\delta x}{(x^2+1)^2} - \frac{2x}{(x^2+1)^3}.$$

En évaluant en 1 (par exemple), on obtient la valeur manquante $\delta = 0$.

In fine, on obtient la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm i\}, \frac{x^4+x+1}{x(x^2+1)^3} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} + \frac{1-2x}{(x^2+1)^3}.$$

Ça aurait pu être pire !

Autocorrection I.

D'après le théorème fondamental, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est de classe C^1, et $F' = f$. En particulier, elle est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

D'après le théorème des accroissements finis, on peut trouver $c \in]a, b[$ tel que $F'(c) = \dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}$, ce qui donne

$$f(c) = F'(c) = \frac{1}{b-a}\big(F(b) - \underbrace{F(a)}_{=0}\big) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt.$$

Autocorrection J.

La fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en 0.

La fonction de l'énoncé, qui est $x \mapsto \dfrac{F(x)}{x} = \dfrac{F(x)-F(0)}{x}$ converge donc vers $F'(0) = f(0)$.

Autocorrection K.

La fonction tan est croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, donc

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right], 0 \leqslant \underbrace{\tan\frac{\pi}{6}}_{=\frac{1}{\sqrt{3}}} \leqslant \tan x \leqslant \underbrace{\tan\frac{\pi}{3}}_{=\sqrt{3}}.$$

Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est à valeurs $\geqslant 0$ sur $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right]$, on peut multiplier cet encadrement par $\dfrac{1}{x}$ pour obtenir

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right], \frac{1}{x\sqrt{3}} \leqslant \frac{\tan x}{x} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{x}.$$

On en déduit, par croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{dx}{x} \leqslant \int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\tan x}{x}dx \leqslant \sqrt{3}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{dx}{x}.$$

Or,

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{dx}{x} = [\ln x]_{x=\pi/6}^{\pi/3} = \ln\left(\frac{\pi}{3}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{3}\right) = \ln 2.$$

On en déduit l'encadrement de l'énoncé.

Autocorrection L.

On peut intégrer l'inégalité $\forall t \in \mathbb{R}, t-1 \leqslant \lfloor t \rfloor \leqslant t$ et obtenir, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{x^2}{2} - x \leqslant \int_0^x (t-1)dt \leqslant \int_0^x \lfloor t \rfloor\ dt \leqslant \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}.$$

On en déduit facilement, d'après le théorème des gendarmes, que $\displaystyle\int_0^x \lfloor t \rfloor\ dt \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

Autocorrection M.

(i) On a, d'après le théorème sur les sommes de Riemann,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin = \frac{2}{\pi}.$$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k/n}{1+k^2/n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_{x=0}^1 = \frac{\ln 2}{2}.$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+k/n} + \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1\frac{dx}{1+x} + 0 = \ln 2.$

Autocorrection N.

(i) La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est lisse. Sa valeur en 0 est 0.

- Sa dérivée est $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, dont la valeur en 0 est $f'(0) = 1$.
- Sa dérivée seconde est $f'' : x \mapsto -\dfrac{1}{(1+x)^2}$, dont la valeur en 0 est $f''(0) = -1$.
- Sa dérivée troisième est $f''' : x \mapsto \dfrac{2}{(1+x)^3}$, dont la valeur en 0 est $f'''(0) = 2$, et qui est à valeurs positives sur $\mathbb{R}_+$.
- Sa dérivée quatrième est $f^{(4)} : x \mapsto -\dfrac{6}{(1+x)^4}$, qui est à valeurs négatives sur $\mathbb{R}_+$.

D'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 (que l'on peut appliquer parce que f est de classe C^3), quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \underbrace{\frac{(x-t)^2}{2}}_{\geqslant 0} \underbrace{f'''(t)}_{\geqslant 0} \, dt \\ &\geqslant x - \frac{x^2}{2}. && \text{(croissance de l'intégrale, } 0 \leqslant x\text{)} \end{aligned}$$

De même, d'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 3 (que l'on peut appliquer parce que f est de classe C^4), quel que soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \int_0^x \underbrace{\frac{(x-t)^3}{6}}_{\geqslant 0} \underbrace{f^{(4)}(t)}_{\leqslant 0} \, dt \\ &\leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}. && \text{(croissance de l'intégrale, } 0 \leqslant x\text{)} \end{aligned}$$

(ii) On procède de même pour la fonction sin.

- La formule de Taylor à l'ordre 3 et le fait que la dérivée quatrième, $\sin^{(4)} = \sin$, est positive sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ montre la première inégalité.
- La formule de Taylor à l'ordre 5 et le fait que la dérivée sixième, $\sin^{(6)} = -\sin$, est négative sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ montre la deuxième inégalité.