

Intégration

Calcul intégral

Autocorrection A.



Déterminer, sans aucun calcul d'intégrale, les primitives des fonctions suivantes.

- | | | |
|---|--|---|
| (i) $x \mapsto xe^{-2x^2}$; | (ix) $x \mapsto \tan^2(x)$; | (xv) $x \mapsto \frac{1}{x + \sqrt{x}}$; |
| (ii) $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$; | (x) $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^4}$; | (xvi) $x \mapsto \frac{\ln(\ln x)}{x}$; |
| (iii) $x \mapsto \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$; | (xi) $x \mapsto \frac{1}{\tan x}$; | (xvii) $x \mapsto e^{e^x+x}$; |
| (iv) $x \mapsto \frac{\cos(\ln x)}{x}$; | (xii) $x \mapsto \frac{x^2}{1+x^3}$; | (xviii) $x \mapsto \frac{1}{x + x(\ln x)^2}$; |
| (v) $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos^3 x}$; | (xiii) $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{1 + \cos^2(x)}$; | (xix) $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{1 + \ln x}}$; |
| (vi) $x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$; | (xiv) $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)\sqrt{\tan x}}$; | (xx) $x \mapsto e^{-x} \sin(2x)$; |
| (vii) $x \mapsto \cos x \sin^5 x$; | | (xxi) $x \mapsto \operatorname{sh} x \sin x$. |
| (viii) $x \mapsto \sin^5 x$; | | |

Exercice 1.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

- (i) $t \mapsto \frac{1}{1+it}$; (ii) $t \mapsto \frac{1}{t-j}$, où $j = \exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)$.

Exercice 2.



1. Calculer $I = \int_0^\pi x \cos^2 x \, dx$.
2. En déduire habilement $J = \int_0^\pi x \sin^2 x \, dx$.

Exercice 3.

Calculer la valeur moyenne $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) \cos(2t) \cos(3t) \, dt$.

Exercice 4.

X (PC)

Calculer la valeur moyenne de \cos^{100} .

Intégration par parties

Autocorrection B.



En utilisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes.

- | | | |
|-----------------------------------|--|---|
| (i) $\int_0^1 t^2 e^t dt;$ | (iv) $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt;$ | (vii) $\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{(x+1)^2} dx;$ |
| (ii) $\int_1^e t^2 \ln t dt;$ | (v) $\int_1^2 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt;$ | (viii) $\int_0^1 \arcsin(x)^2 dx;$ |
| (iii) $\int_0^\pi t \sin(3t) dt;$ | (vi) $\int_0^1 t^3 e^{t^2} dt;$ | (ix) $\int_0^{\sqrt{3}} x^2 \arctan(x) dx.$ |

Exercice 5.

Déterminer les primitives de $x \mapsto e^{2x} \sin(3x)$ et $x \mapsto \operatorname{ch} x \cos x$ à l'aide de l'exponentielle complexe puis à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 6.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes à l'aide d'une intégration par parties.

- | | | |
|-------------------------------|---------------------------------------|--|
| (i) $x \mapsto \arctan x.$ | (iv) $x \mapsto \frac{x}{\cos^2(x)}.$ | (vii) $x \mapsto x \operatorname{ch} x.$ |
| (ii) $x \mapsto (x \ln x)^2.$ | (v) $x \mapsto \ln(1+x^2).$ | (viii) $x \mapsto x \sin^2(x).$ |
| (iii) $x \mapsto x^2 e^x.$ | (vi) $x \mapsto \arcsin x.$ | (ix) $x \mapsto x \arctan x.$ |

Exercice 7.



Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q} = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt.$

1. Montrer $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*, I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}.$
2. En déduire $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$
3. Montrer $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$

Changement de variables

Autocorrection C.



À l'aide d'un changement de variable, calculer les intégrales suivantes.

- | | | |
|--|--|---|
| (i) $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt;$ | (vi) $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t) dt;$ | (xi) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1};$ |
| (ii) $\int_0^1 x e^{\sqrt{x}} dx;$ | (vii) $\int_{1/3}^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}};$ | (xii) $\int_{1/4}^1 \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} dx;$ |
| (iii) $\int_2^3 \frac{t}{(t^2-1)^2} dt;$ | (viii) $\int_1^2 (\ln x)^2 dx;$ | (xiii) $\int_0^\pi \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt;$ |
| (iv) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx;$ | (ix) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^6+1} dx;$ | (xiv) $\int_1^2 \frac{\ln(1+t) - \ln(t)}{t^2} dt.$ |
| (v) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx;$ | (x) $\int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx;$ | |

Exercice 8.

Déterminer une primitive des fonctions suivantes à l'aide d'un changement de variable.

- (i) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$; (iii) $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch} x}$; (v) $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$; (vii) $x \mapsto \frac{\ln t}{t + t(\ln t)^2}$;
 (ii) $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1 + x}}$; (iv) $x \mapsto \sin(\ln(x))$; (vi) $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$; (viii) $x \mapsto \frac{1}{1 + \tan x}$.

Exercice 9.

- Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur \mathbb{R}_+^* .
- Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Déterminer une primitive de $x \mapsto x^\alpha \ln x$ au moyen d'un changement de variable du type $x = t^\beta$ avec $\beta \in \mathbb{R}$ à préciser.

Exercice 10 (Règles de Bioche).

- Trouver une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sin x + \tan x}$, d'abord à l'aide du changement de variables $t = \tan(x/2)$, puis à l'aide du changement de variables $u = \cos(x)$.
- Quand on souhaite calculer la primitive d'une fonction $x \mapsto f(x)$ à l'aide d'un changement de variables trigonométrique, les *règles de Bioche* recommandent de faire, si possible, le changement de variables « possédant la même symétrie que $f(x) dx$ » (le dx est important!), c'est-à-dire
 - ▶ $u = \cos x$ si $f(-x) = -f(x)$ (c'est-à-dire si $f(-x)d(-x) = f(x)dx$);
 - ▶ $u = \sin x$ si $f(\pi - x) = -f(x)$ (c'est-à-dire si $f(\pi - x)d(\pi - x) = f(x)dx$);
 - ▶ $u = \tan x$ si $f(\pi + x) = f(x)$ (c'est-à-dire si $f(\pi + x)d(\pi + x) = f(x)dx$).

Si les trois règles s'appliquent, on pose $u = \cos(2x)$; si aucune ne s'applique, $t = \tan(x/2)$.

Utiliser ces règles pour calculer les intégrales suivantes :

$$(i) \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}; \quad (ii) \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{4 - \cos^2 x} dx; \quad (iii) \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^3 x}; \quad (iv) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \cos(x)}.$$

Exercice 11⁺.

- Montrer : $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt = \frac{\pi}{4}$.
- En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2} + t}$.

Exercice 12.

Calculer $\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1 + t^2} dt$ pour tout $x \geq 1$ en posant $u = 1/t$.

Fractions rationnelles

Autocorrection D. ✓

Déterminer les primitives des fonctions rationnelles suivantes (on se place dans un intervalle que l'on ne précise pas sur lequel la fonction est définie) :

- | | | |
|--|--|---------------------------------------|
| (i) $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 7x + 10};$ | (vi) $x \mapsto \frac{1}{2x^2 + x + 1};$ | (x) $x \mapsto \frac{1}{1 - x^4};$ |
| (ii) $x \mapsto \frac{x + 1}{x^2 - 7x + 10};$ | (vii) $x \mapsto \frac{1}{x^2 - 6x + 9};$ | (xi) $x \mapsto \frac{x^5}{1 - x^4};$ |
| (iii) $x \mapsto \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 7x + 10};$ | (viii) $x \mapsto \left(\frac{x + 1}{x + 2}\right)^2;$ | (xii) $x \mapsto \frac{x}{1 + x^4};$ |
| (iv) $x \mapsto \frac{1}{x^2 - x + 1};$ | (ix) $x \mapsto \frac{1}{(x^2 - 1)(x - 2)^2};$ | (xiii) $x \mapsto \frac{1}{x^3 - 1}.$ |
| (v) $x \mapsto \frac{4 + x}{x^2 + 1};$ | | |

Autocorrection E. ✓

Décomposer en éléments simples les fonctions rationnelles suivantes.

- | | | |
|---|---|---|
| (i) $x \mapsto \frac{x^3}{(x - 1)(x - 2)};$ | (iii) $x \mapsto \frac{x^4 + 1}{x^4 - 1};$ | (v) $x \mapsto \frac{10x^3}{(x^2 + 1)(x^2 - 4)};$ |
| (ii) $x \mapsto \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1};$ | (iv) $x \mapsto \frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)};$ | (vi) $x \mapsto \frac{5}{(x + 1)^5 - x^5 - 1}.$ |

Autocorrection F. ✓

Soit $n \geq 2$. Déterminer une décomposition en éléments simples des fonctions rationnelles suivantes :

- | | | |
|--|---|--|
| (i) $x \mapsto \frac{1}{x(x - 1) \cdots (x - n)};$ | (ii) $x \mapsto \frac{x^{n-1}}{x^n - 1};$ | (iii) $x \mapsto \frac{x^n - 1}{x^n + 1}.$ |
|--|---|--|

Autocorrection G. ✓

En utilisant la forme générale (hors-programme), donner les décompositions en éléments simples des fractions rationnelles suivantes. Quand le dénominateur n'est pas scindé sur \mathbb{R} , on donnera à la fois la décomposition sur \mathbb{C} et celle sur \mathbb{R} .

- | | | |
|--|--|--|
| (i) $x \mapsto \frac{x^3}{(x - 1)^3};$ | (iii) $x \mapsto \frac{1}{(x^2 - 1)(x + 1)^2};$ | (v) $x \mapsto \frac{3x - 1}{x^2(x + 1)^2};$ |
| (ii) $x \mapsto \frac{1}{(x + 1)^2(3 - x)};$ | (iv) $x \mapsto \frac{7x^2 + 4x - 4}{x^4 - 4x^2};$ | (vi) $x \mapsto \frac{x^3 - 1}{(x - 2)^2}.$ |

Autocorrection H. ✓

En utilisant la forme générale (hors-programme) et l'unicité de la décomposition en somme d'une partie paire et d'une partie impaire, obtenir la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} de la fraction

rationnelle $x \mapsto \frac{x^4 + x + 1}{x(x^2 + 1)^3}.$

Exercice 13.

Calculer les (limites d')intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll}
\text{(i)} \int_2^3 \frac{t+1}{t(t-1)^3} dt; & \text{(iii)} \int_0^1 \frac{t^4 dt}{t^2+2t+5}; & \text{(v)} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dt}{(t^2+4)(t+2)^2}; \\
\text{(ii)} \int_0^1 \frac{t^2 dt}{1+t^6}; & \text{(iv)} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{t dt}{(t+1)^2(2t+1)}; & \text{(vi)} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{t dt}{t^3+1}.
\end{array}$$

Autres applications de la décomposition en éléments simples**Exercice 14.**Simplifier les expressions des suites $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.**Exercice 15.**Déterminer les limites de séries $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{n+3}{n^3+3n^2+2n}$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \frac{n}{n^4+n^2+1}$.**Exercice 16.**Soit $P \in K[X]$ un polynôme scindé, dont les racines sont z_1, \dots, z_r (de multiplicités respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_r$). ☑Montrer la décomposition en éléments simples $\forall x \in K \setminus \{z_1, \dots, z_r\}, \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^r \frac{\alpha_k}{x - z_k}$.**Exercice 17⁺.**Soit $n \geq 2$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme dont les racines x_1, \dots, x_n sont simples et non nulles. En effectuant des décompositions en éléments simples bien choisies, montrer 💡

$$\text{(i)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{P'(x_k)} = 0; \quad \text{(ii)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k P'(x_k)} = -\frac{1}{P(0)}; \quad \text{(iii)} \sum_{k=1}^n \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0.$$

Exercice 18⁺⁺.Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ simplement scindé.On note $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ ses racines et $b_1 < \dots < b_{n-1}$ les racines de P' .1. En décomposant en éléments simples $\frac{P'}{P}$ de deux façons différentes, montrer

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, n \prod_{j=1}^{n-1} (a_i - b_j) = \prod_{\substack{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ k \neq i}} (a_i - a_k).$$

2. En déduire $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, a_i + \frac{a_{i+1} - a_i}{n} \leq b_i \leq a_{i+1} - \frac{a_{i+1} - a_i}{n}$.

Autres calculs

Exercice 19.

Donner un sens à l'intégrale $\int_0^1 \frac{x \ln x}{(x^2 + 1)^2}$ et la calculer.

Exercice 20⁺.



1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in [a, b], f(a + b - x) = f(x)$.

Calculer $\int_a^b t f(t) dt$ en fonction de $\int_a^b f$.

2. Calculer $\int_0^\pi \frac{t}{1 + \sin t} dt$.

Exercice 21.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(t^2 + 1)^{n+1}}$.

- Obtenir, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une expression de $I_{n+1}(x)$ en fonction de $I_n(x)$.
- Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x)$, et la calculer.

Propriétés de l'intégrale

Exercice 22.

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ tels que $a < b < c$ et $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, c]$. Montrer

$$\frac{1}{c-a} \int_a^c f \leq \max \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f, \frac{1}{c-b} \int_b^c f \right).$$

Exercice 23.



Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ périodique. À quelle condition f possède-t-elle une primitive périodique ?

Exercice 24.

Déterminer les fonctions f continues sur $[a, b]$ telles que $\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt$.

Exercice 25.



Soit $f \in C^0([0, 1])$ positive telle que $\int_0^1 f \leq \frac{1}{2}$. Montrer que f a un point fixe.

Exercice 26.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, quels que soient $a \leq \alpha < \beta \leq b$, on a $\int_\alpha^\beta f = 0$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 27.

Déterminer les fonctions continues $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telles que $\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$.

Exercice 28⁺.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4$.

Montrer que $f = 0$ ou $f = 1$.

Exercice 29⁺⁺.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f = 0$, et $\alpha = \min_{[0,1]} f$ et $\beta = \max_{[0,1]} f$. Montrer que $\int_0^1 f^2 \leq -\alpha\beta$.

« Théorème fondamental »**Autocorrection I.**

Soit $f \in C^0([a, b])$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.

Autocorrection J.

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$. Déterminer la limite de $\frac{1}{x} \int_0^x f$ quand $x \rightarrow 0$.

Exercice 30.

1. Soit $f \in C^0([-1, 1])$. Déterminer la limite de $\frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt$ quand $x \rightarrow 0$.
2. Que devient le résultat précédent si l'on suppose simplement f continue par morceaux ?

Exercice 31.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $T > 0$. On suppose que la fonction $x \mapsto \int_x^{x+T} f$ est constante.

Montrer que f est T -périodique.

Exercice 32.

1. Si $f \in C^0(\mathbb{R})$, on note $F : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x f(t) dt. \end{cases}$

Montrer que l'application envoyant f sur F est un endomorphisme P_0 de $C^0(\mathbb{R})$. Déterminer son noyau et son image.

2. Mêmes questions pour l'application P_a envoyant $f \in C^0(\mathbb{R})$ sur sa primitive s'annulant en $a \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $f \in C^0(\mathbb{R})$ a une unique primitive G telle que $\int_0^1 G = 0$. Montrer que l'application envoyant f sur G est un endomorphisme Π de $C^0(\mathbb{R})$.

Exercice 33.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Justifier que les fonctions suivantes sont de classe C^1 et exprimer leurs dérivées.

$$\bullet G_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_{2x}^{x^2} f(t) dt ; \end{cases}$$

$$\bullet G_2 : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x x f(t) dt ; \end{cases}$$

$$\bullet G_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_0^x f(t+x) dt ; \end{cases}$$

$$\bullet G_4 : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos(tx)}{t} dt. \end{cases}$$

Exercice 34.

$$\text{Soit } \varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} \frac{\text{sh } t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \text{ et } f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_x^{2x} \varphi. \end{cases}$$

1. Montrer que f est bien définie et étudier la parité de f .
2. Justifier que f est dérivable et calculer $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de f .

Exercice 35⁺.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_a^b |t - x| f(t) dt$. Étudier la dérivabilité de F sur \mathbb{R} .

Exercice 36.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_x^y e^{t^2} dt = 1.$$

2. On note $\varphi(x)$ le réel obtenu à la question précédente. Montrer que φ est une fonction lisse.

Exercice 37.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$ et $0 \leq f' \leq 1$. Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \int_0^1 f^3 \leq \left(\int_0^1 f \right)^2$$

et étudier le cas d'égalité.

Exercice 38⁺⁺.

1. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists C > 0, \forall f \in C^1([a, b]), \forall x \in [a, b],$

$$|f(x)^2 - f(a)^2| \leq C \int_a^b f^2 + \varepsilon \int_a^b f'^2.$$

2. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists D > 0, \forall f \in C^1([a, b]),$

$$\|f^2\|_{\infty} \leq D \int_a^b f^2 + \varepsilon \int_a^b f'^2.$$

Intégrales et inégalités

Autocorrection K. ✓

Montrer $\frac{\ln 2}{\sqrt{3}} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\tan x}{x} \leq \sqrt{3} \ln 2$.

Autocorrection L. ✓

Déterminer un équivalent simple de $\int_0^x [t] dt$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 39⁺. ✓

1. Calculer $\int_e^{\pi} \frac{dx}{x}$.
2. En déduire que $\pi^e < e^{\pi}$.

Exercice 40. ✓

1. Soit $P = X^4(1 - X)^4 \in \mathbb{R}[X]$. Trouver un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ et un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$P = (1 + X^2)Q + \alpha.$$

2. En déduire la valeur de $I = \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx$ et une démonstration de l'inégalité $\frac{22}{7} > \pi$.

3. En encadrant la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $[0, 1]$, montrer l'encadrement

$$\frac{1979}{630} \leq \pi \leq \frac{3959}{1260}.$$

Exercice 41. 💡 ✓

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt \leq \frac{2}{n+1}.$$

Exercice 42⁺. 💡 ✓

Montrer les divergences suivantes, sans chercher à calculer exactement les intégrales.

$$\int_x^{2x} \frac{t}{\ln t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad \int_0^x \sin^2(t) \arctan(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Exercice 43 (Lemme de Gromov). ✓

Soit $f, g \in C^0(\mathbb{R}_+)$. On suppose $g > 0$ et $h : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ croissante.

Le but de l'exercice est de montrer que le quotient $\varphi : x \mapsto \int_0^x f / \int_0^x g$ croît sur \mathbb{R}_+^* . Soit $0 < x_1 \leq x_2$.

1. Montrer que $\int_0^{x_1} f \int_{x_1}^{x_2} g \leq \int_{x_1}^{x_2} f \int_0^{x_1} g$.
2. Conclure.

Exercice 44⁺ (Lemme de Gronwall). ✓

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+)$, à valeurs ≥ 0 , et telle que $\exists K \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \leq K \int_0^x f(t) dt$.

Montrer que f est nulle.

Intégration et convexité

Exercice 45 (Inégalité intégrale de Jensen).

Soit $g \in C_{\text{pm}}^0([0, 1])$ à valeurs dans $[a, b]$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer $f\left(\int_0^1 g\right) \leq \int_0^1 f \circ g$.

Exercice 46⁺ (Inégalité de Hermite-Hadamard et intégration numérique).

1. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer l'inégalité de Hermite-Hadamard :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

2. **Application.** Soit $f \in C^2([a, b])$. Montrer

$$\left| \int_a^b f - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \|f''\|_\infty \frac{(b-a)^3}{24} \quad \text{et} \quad \left| \int_a^b f - (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \leq \|f''\|_\infty \frac{(b-a)^3}{12}.$$

3. En déduire que pour $f \in C^2([0, 1])$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left| \int_0^1 f - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \right| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{24n^2} \quad \text{et} \quad \left| \int_0^1 f - \frac{1}{n} \left(\frac{f(0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{f(1)}{2} \right) \right| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{12n^2}.$$

Ces inégalités constituent un contrôle de l'erreur commise dans deux méthodes de calcul approché appelées respectivement *méthode des rectangles centrées* et *méthode des trapèzes* : convainquez-vous que ces noms sont raisonnables.

Exercice 47⁺.



Soit $f \in C^1([0, 2\pi])$ une fonction convexe. Montrer que

$$\forall n > 0, \quad a_n = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \geq 0.$$

Exercice 48⁺ (Normes L^p).

Soit $p \geq 1$. Pour tout $f \in C_{\text{pm}}^0([0, 1])$, on définit la « norme L^p » :

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_0^1 |f|^p \right)^{1/p}.$$

1. Quelle est la limite de $\|f\|_{L^p}$ quand p tend vers $+\infty$?

2. On suppose $p > 1$, et on définit $q = \frac{p}{p-1}$, si bien que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) Montrer l'inégalité de Young : $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$.

(b) En commençant par le cas $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$, montrer l'inégalité de Hölder :

$$\forall f, g \in C_{\text{pm}}^0([0, 1]), \int_0^1 fg \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

(c) Soit $p_1 \leq p_2 \in [1, +\infty[$. Comparer $\|f\|_{L^{p_1}}$ et $\|f\|_{L^{p_2}}$.

3. Soit $f, g \in C_{\text{pm}}^0([0, 1])$, et $p > 1$.

(a) Montrer $\|f + g\|_{L^p}^p \leq \int_0^1 |f| |f + g|^{p-1} + \int_0^1 |g| |f + g|^{p-1}$.

(b) En appliquant habilement l'inégalité de Hölder, montrer l'inégalité de Minkowski :

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Utilisation pour les suites récurrentes

Exercice 49. _____ X

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. En donner un équivalent.

Exercice 50. _____

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

En donner un équivalent.

Exercice 51⁺. _____ X

Soit $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + \exp(-x_n)$.

En donner un développement asymptotique à deux termes.

Suites d'intégrales

Exercice 52. _____  

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$f_n : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{t^n \sin(nt)}{1+t^3} \end{cases} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 f_n(t) dt.$$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |I_n| \leq \frac{1}{n+1}$.
2. En déduire la nature de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 53⁺. _____

Pour $n \geq 0$, on définit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Montrer que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
2. En calculant $I_n + I_{n+1}$, déterminer la limite $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Exercice 54. _____

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$f_n : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 2n(1-nx) & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $[0, 1]$ et calculer $\int_0^1 f_n(x) dx$.
2. Comparer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ et $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$.

Exercice 55⁺. _____ 

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Déterminer la limite de $\left(\int_0^1 f(x^n) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 56⁺.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $u_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$.

- Démontrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- On suppose de plus que f est C^1 et que $f(1) \neq 0$. Déterminer un équivalent de (u_n) .
- Déterminer un équivalent de $\int_0^1 t^n \sin \frac{\pi t}{2} dt$ et $\int_0^1 t^n \cos \frac{\pi t}{2} dt$

Exercice 57⁺ (Lemme de Riemann-Lebesgue dans le cas C^1).

Soit $f \in C^1([a, b])$. Montrer que $\int_a^b f(t) \cos(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Sommes de Riemann**Autocorrection M.**

Déterminer les limites des suites suivantes.

$$(i) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}; \quad (ii) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2 + k^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}; \quad (iii) \left(\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}.$$

Exercice 58.

Déterminer les limites des suites suivantes.

$$(i) \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k e^{-k/n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}; \quad (v) \left(\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*};$$

$$(ii) \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (\ln k^k - \ln n^k) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}; \quad (vi) \left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \left(1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right)} \right)_{n \in \mathbb{N}^*};$$

$$(iii) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos^2 \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}; \quad (vii) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}} \right)_{n \in \mathbb{N}^*};$$

$$(iv) \left(n \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}; \quad (viii) \left(\frac{1}{n} \prod_{k=1}^n \sqrt[k]{k+n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}.$$

Exercice 59.

Montrer que $\frac{e}{4n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Exercice 60.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

- Déterminer la limite de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} f \left(\frac{k}{n} \right) f \left(\frac{\ell}{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- Déterminer la limite de $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} f \left(\frac{k}{n} \right) f \left(\frac{\ell}{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 61⁺.

Soit $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Déterminer la limite de $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 62.

Déterminer un équivalent simple des suites

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Exercice 63⁺.

Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_{n,p} = \left(\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \left(1 + \frac{k}{p} \right)^{1/n} \right)^n$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{p \rightarrow +\infty} u_{n,p}$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n,p}$.

Exercice 64⁺.

Soit $f \in C^0([a, b])$ à valeurs strictement positives et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe une unique subdivision $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \int_{x_{i-1}}^{x_i} f = \frac{1}{n} \int_a^b f.$$

2. Quelle est la limite de la suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(x_k) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

Formules de Taylor

Autocorrection N.

Montrer les inégalités suivantes.

$$(i) \forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}; \quad (ii) \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Exercice 65.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{et} \quad \cos x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

Exercice 66.

Donner un développement asymptotique de $\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$ à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 67.

1. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer

$$\forall x \in [0, 1], x^2 - \frac{1}{3}x^4 \leq \sin^2 x \leq x^2.$$

2. En déduire la limite de la suite $\left(\sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{1}{\sqrt{n+k}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 68.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

2. En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
 3. Comment approcherait-on $\ln(1/2)$ et $\ln 4$?

Exercice 69⁺.



Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré impair tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \left| f^{(n)}(x) \right| \leq |P(x)|.$$

1. Montrer que f est la fonction nulle.
 2. Le résultat reste-t-il vrai si $\deg P$ est pair?

Exercice 70⁺⁺ (Inégalité de Kolmogorov).

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 , telle que f et f'' soient bornées. On note

$$M_0 = \sup_{\mathbb{R}} |f| \quad \text{et} \quad M_2 = \sup_{\mathbb{R}} |f''|.$$

1. Justifier l'existence de M_0 et M_2 .
 2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x_0 et $x_0 + h$, montrer que pour tout $h > 0$, on a $|f'(x_0)| \leq \frac{2M_0}{h} + h \frac{M_2}{2}$.
 3. En déduire que f' est aussi bornée et que $\sup_{\mathbb{R}} |f'| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

Mélange

Exercice 71.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(1) = \int_0^1 f$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 72.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer $\exists c \in]0, 1[: f(c) = 3 \int_0^1 x^2 f(x) dx$.

Exercice 73.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, non identiquement nulle, telle que

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \int_a^b t^k f(t) dt = 0.$$

Montrer que f change au moins n fois de signe sur $]a, b[$.

Exercice 74.

Soit $f \in C^0([0, \pi])$ tel que $\int_0^\pi f(t) \cos(t) dt = \int_0^\pi f(t) \sin(t) dt = 0$.

Montrer que f admet au moins deux zéros sur $]0, \pi[$.

Exercice 75⁺.



Soit $f \in C^0([0, 1])$. Déterminer la limite de $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 76⁺⁺⁺ (Polynômes préservant la mesure de Lebesgue).

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ qui envoient $[0, 1]$ dans lui-même et tels que

$$\forall f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}), \int_0^1 f(P(t)) dt = \int_0^1 f(t) dt.$$

Prolongement de la théorie

Exercice 77⁺.

Soit $f \in C^0([0, 1])$.

1. **Théorème de Heine.** On veut montrer que f est *uniformément continue*, c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in [0, 1], |x_1 - x_2| \leq \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon.$$

(a) On suppose que l'assertion précédente est fautive. Construire un nombre $\varepsilon > 0$ et deux suites $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0, 1]$ telles que

$$\xi_n - \eta_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, |f(\xi_n) - f(\eta_n)| > \varepsilon.$$

(b) En utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass, obtenir une contradiction (et conclure la démonstration du théorème de Heine).

2. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier φ telle que f et φ soient *uniformément ε -proches*, au sens où $\forall x \in [0, 1], |f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$.

Exercice 78⁺⁺ (Intégration des relations de comparaison).

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs strictement positives.

1. Quel sont les comportements possibles de $x \mapsto \int_1^x \varphi(t) dt$ quand $x \rightarrow +\infty$?

Dans toute la suite, on suppose en outre que $\int_1^x \varphi(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

2. **Intégration de la négligeabilité.** Dans cette question, on considère une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(\varphi(x))$.

(a) Soit $\varepsilon > 0$.

- i. Montrer qu'il existe $a \geq 1$ tel que

$$\forall x \geq a, \left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \varepsilon \int_1^x \varphi(t) dt.$$

- ii. En déduire qu'il existe $x_0 \geq 1$ tel que

$$\forall x \geq x_0, \left| \int_1^x f(t) dt \right| \leq 2\varepsilon \int_1^x \varphi(t) dt.$$

(b) Montrer $\int_1^x f(t) dt = o_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_1^x \varphi(t) dt \right)$.

3. **Intégration des équivalents.** Dans cette question, on considère une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \varphi(x)$.

Montrer $\int_1^x f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^x \varphi(t) dt$.

4. **Applications.**

- (a) **Théorème de Cesàro continu.** Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+)$ tel que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$.

Montrer $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

- (b) Déterminer un équivalent de $x \mapsto \int_0^x \frac{t dt}{\arctan(t)}$ quand $x \rightarrow +\infty$.

- (c) Donner un équivalent de $x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ quand $x \rightarrow +\infty$.