Séries

Exercice 4.
On pourra se souvenir que si une suite converge vers $\alpha > \beta$, alors elle est $> \beta$ à partir d'un certain rang.

Exercice 6.
On pourra montrer que $x \mapsto \exp(-x^n)$ est convexe, et utiliser cette remarque pour minorer l'intégrale par une suite « en $1/n$ ».

Exercice 10.
Le développement asymptotique $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ pourra être utile.

Exercice 12.
On pourra s'inspirer de la méthode générale vue en cours pour calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 21.
Comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, à partir d'un certain rang, on a...

Exercice 22.
On pourra s'inspirer de la démonstration élémentaire, due à Nicolas Oresme, de la divergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ qui s'obtient en « faisant des paquets ».

Exercice 34.
Pour la deuxième question, on pourra montrer que $\dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{\alpha-1}{n^{\alpha}}$, puis appliquer la question précédente à cette série télescopique.

Autocorrection

Autocorrection A.
Les relations d'équivalence ou de domination données dans la suite sont parfois le fruit d'un calcul non trivial.

(i) On a $n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$: la série diverge grossièrement.

(ii) On a $\left(\dfrac{n}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$: la série diverge grossièrement.

(iii) On a $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissance comparée : la série converge par comparaison à une série de Riemann (technique standard pour les séries « à l'air exponentiel »).

(iv) On a $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$: la série diverge par comparaison à une série de Riemann.

(v) On a $1-\cos\dfrac{\pi}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{2n^2}$: la série converge par comparaison à une série de Riemann.

(vi) On a $\dfrac{(-1)^n+n}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$: la série diverge par comparaison à une série de Riemann.

(vii) On a $|a^n n!| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ dès que $a \neq 0$. Ainsi, la série converge (elle est nulle à partir d'un certain rang) si $a=0$, et diverge grossièrement dans tous les autres cas.

(viii) On a $ne^{-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissance comparée : la série converge par comparaison à une série de Riemann (technique standard pour les séries « à l'air exponentiel »).

(ix) Distinguons trois cas :

- si $a \leqslant 0$, la série diverge grossièrement ;
- si $0 < a \leqslant 1$, on a $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{\ln n}{n^a}\right)$, et la série diverge par comparaison à une série de Riemann ;
- si $a > 1$, on peut trouver un réel $1 < b < a$, et on a $\dfrac{\ln n}{n^a} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^b}\right)$ (par croissance comparée) : la série converge par comparaison à une série de Riemann.

(x) On a $\ln\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$: la série converge par comparaison à une série de Riemann.

(xi) On a $\dfrac{\ln(n^2+3)\sqrt{2^n+1}}{4^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$: la série converge par comparaison à une série de Riemann (technique standard pour les séries « à l'air exponentiel »).

(xii) On a $\dfrac{\ln n}{\ln(e^n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$, donc $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{\ln n}{\ln(e^n-1)}\right)$: la série diverge par comparaison à une série de Riemann.

(xiii) On a $\sqrt{\operatorname{ch}\dfrac{1}{n}-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$: la série diverge par comparaison à une série de Riemann.

(xiv) On a $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$: la série converge par comparaison à une série de Riemann (technique standard pour les séries « à l'air exponentiel »).

(xv) On a $\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^{n^\alpha} = \exp\left[-\dfrac{1}{6}n^{\alpha-2}+o(n^{\alpha-2})\right]$. On montre alors que la série diverge grossièrement si $\alpha \leqslant 2$ et qu'elle converge si $\alpha > 2$ car son terme général est alors $\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ (technique standard pour les séries « à l'air exponentiel »).

(xvi) On a $\sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3} = \left(\dfrac{a}{3}-\dfrac{3}{2}\right)\dfrac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Ainsi,

- si $a \neq \dfrac{9}{2}$, le terme général est équivalent à $\underbrace{\left(\dfrac{a}{3}-\dfrac{3}{2}\right)}_{\neq 0}\dfrac{1}{n}$, et la série diverge par comparaison à une série de Riemann ;
- si $a = \dfrac{9}{2}$, le terme général est $\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, et la série converge par comparaison à une série de Riemann.

(xvii) On a $e^{1/n}-a-\dfrac{b}{n} = (1-a)+\dfrac{1-b}{n}+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Ainsi,

- si $a \neq 1$, le terme général tend vers $1-a \neq 0$, et la série diverge grossièrement ;
- si $a=1$ et $b \neq 1$, le terme général est équivalent à $\dfrac{1-b}{n}$, et la série diverge par comparaison à une série de Riemann ;

- si $a = b = 1$, le terme général est $\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et la série converge par comparaison à une série de Riemann.

Remarque : il était habile d'effectuer un développement du terme général avec un terme d'erreur en $\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ plutôt que d'écrire un terme en $\frac{*}{n^2}$ (qui n'aurait pas eu d'importance) puis un terme d'erreur en $\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

(xviii) Le terme général est équivalent à $2\frac{\ln(n)}{n^a}$. Ainsi, en reprenant le résultat d'une question précédente, la série converge si et seulement si $a > 1$.

Autocorrection B.

1. Soit $n \geqslant 1$. La comparaison série-intégrale (cas décroissant) donne

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_{n+1}^{2n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} &= \int_{n+1}^{2n+1} \frac{dt}{t} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\ &= \left[2\sqrt{t}\right]_{t=n+1}^{2n} + o(\sqrt{n}).\end{aligned}$$

Or,

$$\left[2\sqrt{t}\right]_{t=n+1}^{2n} = 2\left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+1}\right) = 2\underbrace{\left(\sqrt{\frac{2n+1}{n}} - \sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}\sqrt{2}-1}\sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\sim} 2\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{n},$$

d'où l'on tire

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to\infty}{\sim} 2\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{n}.$$

Remarque. Il serait aussi possible de modifier un peu la comparaison série-intégrale du cours pour simplifier les calculs ultérieurs : l'inégalité

$$\forall k \geqslant 2, \int_{k}^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

donne, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\int_{n}^{2n} \frac{dt}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n-1} \int_{k}^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}\,dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_{n}^{2n} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt,$$

d'où l'on tire $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \int_{n}^{2n} \frac{dt}{\sqrt{t}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{n} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} 2\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{n}$.

Deuxième remarque. On peut aussi effectuer un « changement d'échelle » intelligent pour se ramener à une somme de Riemann (ce qui est un autre type de comparaison série-intégrale) :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}} = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\ell}{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = 2\left(\sqrt{2}-1\right).$$

2. Soit $n \geqslant 2$. Par comparaison série-intégrale,

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{t\,\ln t} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,\ln k} \leqslant \int_2^{n+1} \frac{dt}{t\,\ln t} + \frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \leqslant \int_2^{n+1} \frac{dt}{t\,\ln t} + \frac{1}{2\ln 2},$$

donc (avec une petite idée pour se simplifier les calculs)

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,\ln k} = \int_2^{n+1} \frac{dt}{t\,\ln t} + O(1) = \int_2^{n} \frac{dt}{t\,\ln t} + \underbrace{\int_n^{n+1} \frac{dt}{t\,\ln t}}_{=O\left(\frac{1}{n\,\ln(n)}\right)=O(1)} + O(1) = \int_2^{n} \frac{dt}{t\,\ln t} + O(1).$$

Or,

$$\int_2^{n} \frac{dt}{t\,\ln t} = [\ln(\ln t)]_{t=2}^{n} = \ln(\ln n) - \ln\ln 2 = \ln(\ln n) + O(1).$$

In fine,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\,\ln k} = \int_2^{n} \frac{dt}{t\,\ln t} + O(1) = \ln(\ln n) + O(1) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(\ln n).$$