

Espaces euclidiens

Exercice 8.

On pourra montrer l'identité du parallélogramme généralisée : $\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon \in \{\pm 1\}^n} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2$.

Exercice 12.

Faire un dessin !

Exercice 14.

On pourra procéder par récurrence et démontrer que quand on projette une famille obtusangle « dans la bonne direction », la famille projetée reste obtusangle (et les angles deviennent même plus obtus).

Exercice 24.

On pourra trouver une manière de modifier la définition de F , de telle sorte qu'un vecteur normal à F devienne immédiatement apparent.

Exercice 28.

On pourra s'intéresser à $\text{tr Mat}_{\mathcal{B}}(p)$.

Exercice 31.

Étant donné un hyperplan H de $\mathbb{R}^n$, on pourra commencer par montrer que $\sum_{k=1}^n d(e_k, H)^2 = 1$.

Autocorrection

Autocorrection A.

On vérifie successivement les axiomes.

Positivité. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $\langle P|P \rangle = \int_0^1 P(t)^2 dt \geq 0$.

Caractère défini. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\langle P|P \rangle = 0$.

On a donc $\int_0^1 P(t)^2 dt = 0$. La fonction polynomiale $t \mapsto P(t)^2$ étant positive et continue, on en déduit que $\forall t \in [0, 1], P(t) = 0$ par stricte positivité de l'intégrale.

D'après le critère radical de nullité, on en déduit $P = 0$.

Symétrie. La symétrie est claire.

Bilinéarité. La bilinéarité de $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est une conséquence directe de la linéarité de l'intégrale : pour tous $P, Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\langle P|Q_1 + \lambda Q_2 \rangle = \int_0^1 (P(t) Q_1(t) + \lambda P(t) Q_2(t)) dt = \int_0^1 P(t) Q_1(t) dt + \lambda \int_0^1 P(t) Q_2(t) dt = \langle P|Q_1 \rangle + \lambda \langle P|Q_2 \rangle.$$

(Remarquons que la symétrie dispense de vérifier la linéarité par rapport à la première variable.)

Autocorrection B.

1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$:

$$\sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} \times 1 \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}} \sqrt{\sum_{k=0}^n 1^2} = 2^{n/2} \sqrt{n+1}.$$

2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Pour le produit scalaire canonique sur $M_n(\mathbb{R})$, on a $\text{tr}(A) = \text{tr}(I_n^T A) = \langle I_n | A \rangle$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a donc

$$|\langle I_n | A \rangle| \leq \|I_n\| \|A\| = \sqrt{n} \|A\|.$$

3. Il y a beaucoup de manières de montrer ce résultat, mais il suffit par exemple d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz (sous la forme $\langle y | z \rangle^2 \leq \|y\|^2 \|z\|^2$) dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ à deux vecteurs bien choisis :

$$n^2 = \left(\sum_{k=1}^n 1 \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{x_k} \frac{1}{\sqrt{x_k}} \right) \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right).$$

Autocorrection C.

Il suffit de se souvenir que $\underbrace{p(x)}_{\in F} \perp \underbrace{x - p(x)}_{\in F^\perp}$, donc

$$d(x, F)^2 = \|x - p(x)\|^2 = \langle x - p(x) | x - p(x) \rangle = \langle x | x - p(x) \rangle + \underbrace{\langle p(x) | x - p(x) \rangle}_{=0}.$$

Autocorrection D.

(i) Il s'agit, dans $C^0([0, 1])$ muni du produit scalaire canonique, de trouver la distance au carré de $i : t \mapsto t$ au plan $F = \text{Vect}(r : t \mapsto \sqrt{t}, u : t \mapsto 1)$.

► Le projeté orthogonal de i sur F est l'unique élément $ar + bu$ de F faisant avec les éléments de F les mêmes produits scalaires que i , c'est-à-dire

$$\begin{cases} \langle ar + bu | u \rangle = \langle i | u \rangle \\ \langle ar + bu | r \rangle = \langle i | r \rangle \end{cases} \quad \text{ce qui équivaut à} \quad \begin{cases} \frac{2}{3}a + b = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Après résolution du système, on trouve que le projeté est $p = \frac{6}{5}r - \frac{3}{10}u : t \mapsto \frac{6}{5}\sqrt{t} - \frac{3}{10}$.

► La distance au carré cherchée est donc

$$\begin{aligned} \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t - (a\sqrt{t} + b))^2 dt &= \|i - p\|^2 \\ &= \langle i - p | i - p \rangle \\ &= \langle i | i - p \rangle \quad (\text{car } p \perp i - p) \\ &= \int_0^1 t \left(t - \left(\frac{6}{5}\sqrt{t} - \frac{3}{10} \right) \right) \\ &= \frac{1}{300}. \end{aligned}$$

(ii) On procède de même (ou de même que dans le cours). On cherche ici la distance au carré de X^3 à $F = \mathbb{R}_2[X]$ dans l'espace $\mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire canonique.

- En résolvant le système
$$\begin{cases} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = \frac{1}{4} \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} = \frac{1}{5} \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{5} = \frac{1}{6} \end{cases}$$
 (traduisant que $a + bX + cX^2$, le projeté orthogonal cherché, possède les mêmes produits scalaires « contre » les éléments de F que le polynôme X^3), on obtient que le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ est $\frac{3}{2}X^2 - \frac{3}{5}X + \frac{1}{20}$.
- Cela donne la distance au carré cherchée :

$$\begin{aligned} \inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^3 - (a + bt + ct^2))^2 dt &= \|t \mapsto t^3 - (a + bt + ct^2)\|^2 \\ &= \left\langle t \mapsto t^3 - (a + bt + ct^2) \middle| t \mapsto t^3 \right\rangle \quad (\text{Pythagore}) \\ &= \frac{1}{2800}. \end{aligned}$$