Première composition de mathématiques

Durée : *2 heures.*

Toute sortie est interdite pendant les dix dernières minutes.

Sauf mention explicite du contraire, tout doit toujours être parfaitement justifié.

*Les documents, calculatrices, etc. sont **interdits**.*

Consignes générales de présentation

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci $\boxed{\textit{d'encadrer}}$ ou de souligner vos résultats.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.*
- *Les parties trop difficiles à lire de votre copie ne seront pas lues.*

Conseils pour ce premier devoir

- *Le sujet est très long. Ne vous laissez pas impressionner : l'important est de faire le mieux possible les questions que vous traitez, même si ça n'est qu'une petite partie du sujet. Les premières questions seront de toute façon prépondérantes dans le barème.*
- *Une **très grande** part de l'évaluation porte sur la rigueur logique de vos raisonnements. Je serai donc impitoyable avec le respect des règles de logique vues en cours.*
- *Le premier devoir de maths de prépa est un moment un peu impressionnant mais après tout, il s'agit simplement de faire des maths, ce que vous savez bien faire, et la note aura un impact négligeable sur votre vie :* don't panic!

Exercice.

On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T_n = \frac{1}{n}\left(-1^2 + 2^2 - 3^2 + \cdots + (-1)^n n^2\right).$$

1. Recopier sur votre copie et compléter (sans démonstration, mais sans erreur) le tableau des premières valeurs de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

n	1	2	3	4	5	6
T_n	-1	$\frac{3}{2}$				

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $(n+1)\,T_{n+1}$ en fonction de $n\,T_n$.
3. Conjecturer une expression simple pour la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, et la montrer par récurrence.

Problème. Une équation fonctionnelle.

Le but de ce problème est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f\big(f(x)\,f(y)\big) + f(x+y) = f(xy). \tag{$\bowtie$}$$

Partie I. Préliminaires sur les fonctions injectives.

Une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite *injective* si elle vérifie l'assertion

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, h(u) = h(v) \Rightarrow u = v.$$

Il est possible que vous ayez vu au lycée des résultats sur les fonctions injectives. Je vous demande de n'en utiliser aucun dans ce problème, et de vous appuyer uniquement sur la définition ci-dessus.

1. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Écrire avec des quantificateurs l'assertion « h n'est pas injective. »
2. Donner (avec démonstration), un exemple de fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas injective.
3. Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions injectives. Montrer que $g \circ f$ est injective.

Partie II. Premier contact.

Dans toute cette partie, on considère une fonction f vérifiant ($\bowtie$).

4. Montrer que le nombre $z = f(0)^2$ est un *zéro* de la fonction f, c'est-à-dire que $f(z) = 0$.
5. Montrer que si $f(0) = 0$, alors f est la fonction nulle, c'est-à-dire que $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = 0$.
6. Montrer que la fonction opposée $-f$ vérifie également ($\bowtie$).

Partie III. Quelques solutions.

Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $f_{a,b}$ la fonction $x \mapsto ax + b$.

7. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $f_{a,b}\big(f_{a,b}(x)\, f_{a,b}(y)\big) + f_{a,b}(x+y) - f_{a,b}(xy)$.
   On pourra noter φ la fonction $f_{a,b}$ pour simplifier l'écriture.
   Le résultat exact étant nécessaire pour traiter correctement la question suivante, on sera particulièrement soigneux dans le calcul.
8. En déduire tous les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f_{a,b}$ vérifie ($\bowtie$).
   On pourra procéder par analyse et synthèse.

Partie IV. Le choc de simplification.

Dans toute cette partie, on considère une fonction f vérifiant ($\bowtie$) et $f(0) > 0$.

9. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence $x \neq 1 \Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R} : x + y = xy$.
10. Montrer $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f(x) \neq 0$.
11. En déduire $f(1) = 0$ et $f(0) = 1$.
12. Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x) - 1$.
13. Déterminer la valeur de $f(n)$ pour tout entier relatif n.

Partie V. Conclusion dans le cas injectif.

Dans toute cette partie, on considère une fonction f vérifiant ($\bowtie$) et $f(0) > 0$.

14. Montrer $\forall x \in \mathbb{R}, f\big(f(x)\big) = 1 - f(x)$ et en déduire $\forall x \in \mathbb{R}, f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = f(x)$.
15. Montrer que si f est une fonction injective, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - x$.

Partie VI. Une démonstration d'injectivité.

Dans cette partie, on dira qu'un couple $(s, p) \in \mathbb{R}^2$ est *réalisable* s'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $s = x + y$ et $p = xy$. On note $\mathscr{R}$ l'ensemble des couples réalisables.

En symboles, on a donc $\mathscr{R} = \left\{ (x+y, xy) \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

16. Montrer que $\mathscr{R} \neq \mathbb{R}^2$.
17. Écrire avec des quantificateurs l'assertion : « pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, le couple $(u + n + 1, v + n)$ est réalisable dès que $n \in \mathbb{N}$ est un entier suffisamment grand. »
18. Démontrer l'assertion de la question précédente.
19. En déduire que toute fonction f vérifiant ($\bowtie$) et $f(0) > 0$ est injective.

Partie VII. Conclusion générale.

20. En utilisant ce qui précède, déterminer complètement les fonctions f vérifiant ($\bowtie$).