

Deuxième composition de mathématiques [corrigé]

Exercice 1. Interro de calcul du vendredi.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos(x)^6$.

On a

$$\begin{aligned}
 \cos(x)^6 &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^6 \\
 &= \frac{1}{2^6} (e^{i6x} + 6e^{i4x} + 15e^{i2x} + 20 + 15e^{-i2x} + 6e^{-i4x} + e^{-i6x}) \quad (\text{binôme de Newton}) \\
 &= \frac{1}{2^5} (\cos(6x) + 6\cos(4x) + 15\cos(2x) + 10) \\
 &= \frac{1}{32} \cos(6x) + \frac{3}{16} \cos(4x) + \frac{15}{32} \cos(2x) + \frac{5}{16}.
 \end{aligned}$$

2. (a) Montrer $\forall \ell \in \mathbb{Z}, \frac{1 + (-1)^\ell}{2} = \mathbb{1}_{(\ell \text{ pair})}$.

Soit $\ell \in \mathbb{Z}$.

- Si ℓ est pair, on a $(-1)^\ell = 1$ donc $\frac{1 + (-1)^\ell}{2} = 1$.
- Si ℓ est impair, on a $(-1)^\ell = -1$ donc $\frac{1 + (-1)^\ell}{2} = 0$.

Dans les deux cas, on a donc $\frac{1 + (-1)^\ell}{2} = \mathbb{1}_{(\ell \text{ pair})}$.

- (b) Soit $q \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{\substack{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} q^k$.

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} q^k &= \sum_{k=0}^n \mathbb{1}_{(k \text{ pair})} \binom{n}{k} q^k \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{1 + (-1)^k}{2} \binom{n}{k} q^k \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \underbrace{(-1)^k q^k}_{=(-q)^k} \\
 &= \frac{1}{2} (1 + q)^n + \frac{1}{2} (1 - q)^n,
 \end{aligned}$$

d'après le binôme de Newton.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes doubles :

$$(a) \sum_{1 \leq i, j \leq n} i j^2,$$

$$(b) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (2i - 1) j.$$

► La première somme est rectangulaire et à variables séparées, ce qui permet de la factoriser :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} i j^2 &= \left(\sum_{i=1}^n i \right) \left(\sum_{j=1}^n j^2 \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12}. \end{aligned}$$

► La deuxième somme est triangulaire, et on la traite comme telle :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (2i - 1) j &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j (2i - 1) j \\ &= \sum_{j=1}^n j \sum_{i=1}^j (2i - 1) \\ &= \sum_{j=1}^n j \cdot \left(j \cdot \frac{1 + (2j - 1)}{2} \right) \quad (\text{somme arithmétique, par exemple}) \\ &= \sum_{j=1}^n j^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 2

1. Soit E un ensemble et $f : E \rightarrow E$ une application. Montrer, par double implication :

$$f \circ f = f \Leftrightarrow \forall y \in f[E], f(y) = y.$$

Sens direct. Supposons $f \circ f = f$.

Soit $y \in f[E]$.

On peut donc trouver $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

On en déduit $f(y) = f(f(x)) = (f \circ f)(x) = f(x) = y$, ce qui conclut.

Sens réciproque. Supposons $\forall y \in f[E], f(y) = y$.

Montrons $f \circ f = f$.

► Les (co)domaines sont les bons : les deux fonctions sont $E \rightarrow E$.

► Soit $x \in E$.

En appliquant l'hypothèse à $y = f(x)$, qui appartient bien à $f[E]$, on obtient $f(y) = y$, c'est-à-dire $f(f(x)) = f(x)$, c'est-à-dire $(f \circ f)(x) = f(x)$.

2. Soit E, F et G trois ensembles et $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ deux applications. Montrer l'équivalence

$$g \circ f \text{ injective} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ injective} \\ g|_{f[E]} \text{ injective.} \end{cases}$$

On procède par double implication.

Sens direct. Supposons $g \circ f$ injective.

- Le cours garantit déjà que f est injective.
- Montrons $g|_{f[E]}$ injective.

Soit $y_1, y_2 \in f[E]$ tels que $g|_{f[E]}(y_1) = g|_{f[E]}(y_2)$, c'est-à-dire tels que $g(y_1) = g(y_2)$.

Comme $y_1 \in f[E]$, on peut trouver $x_1 \in E$ tel que $y_1 = f(x_1)$. De même, on peut trouver $x_2 \in E$ tel que $y_2 = f(x_2)$.

On a ainsi $(g \circ f)(x_1) = g(y_1) = g(y_2) = (g \circ f)(x_2)$, donc $x_1 = x_2$, par injectivité de $g \circ f$.

On en déduit $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$, ce qui conclut.

Sens réciproque. Supposons f et $g|_{f[E]}$ injectives, et montrons $g \circ f$ injective.

Soit $x_1, x_2 \in E$ tels que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$.

On a donc $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.

Comme $f(x_1)$ et $f(x_2)$ appartiennent à $f[E]$, on peut réécrire cette égalité $g|_{f[E]}(f(x_1)) = g|_{f[E]}(f(x_2))$.

Par injectivité de $g|_{f[E]}$, on en déduit $f(x_1) = f(x_2)$.

Par injectivité de f , on en déduit $x_1 = x_2$, ce qui conclut.

3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathbb{R}$ telle que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subseteq A_{n+1}$.

(a) Montrer que f est croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction de f à A_n est croissante.

- Supposons f croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $f|_{A_n}$ croît.

Soit $x_1, x_2 \in A_n$ tels que $x_1 \leq x_2$.

Par croissance de f , on a $f(x_1) \leq f(x_2)$, c'est-à-dire $f|_{A_n}(x_1) \leq f|_{A_n}(x_2)$.

- Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction $f|_{A_n}$ soit croissante. Montrons que f croît.

Soit $x_1 \leq x_2$ deux réels.

Comme $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$, on peut trouver $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $x_1 \in A_{n_1}$ et $x_2 \in A_{n_2}$.

Une démonstration par récurrence (très semblable à ce que l'on a fait sur les suites strictement croissantes au devoir précédent!), montre que l'hypothèse $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subseteq A_{n+1}$ entraîne la propriété de « croissance » $\forall p, q \in \mathbb{N}, p \leq q \Rightarrow A_p \subseteq A_q$.

En notant $N = \max(n_1, n_2)$, on a $n_1 \leq N$ et $n_2 \leq N$, donc $A_{n_1} \subseteq A_N$ et $A_{n_2} \subseteq A_N$. On en déduit que x_1 et x_2 sont tous deux éléments de A_N .

Comme $f|_{A_N}$ croît, on a $f|_{A_N}(x_1) \leq f|_{A_N}(x_2)$, c'est-à-dire $f(x_1) \leq f(x_2)$, ce qui conclut.

- (b) Construire un exemple de suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ montrant que la question précédente devient fausse en remplaçant « croissante » par « bornée ».

Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = [-n, n]$ et $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

- Il est assez clair que $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subseteq A_{n+1}$.
- Une démonstration très proche du cours montre que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$.
- Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction de f à A_n soit bornée.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons $\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in A_n, |f|_{A_n}(x) \leq C$.

Candidat : $C = n$.

- On a bien $C \in \mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in A_n$, on a $|f|_{A_n}(x) = |f(x)| = |x| \leq n$.
- Montrons que f n'est pas bornée, c'est-à-dire que $\forall C \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} : |f(x)| > C$.

Soit $C \in \mathbb{R}$.

Candidat : $x = |C| + 1$.

- On a bien $x \in \mathbb{R}$ (et même $x \in [1, +\infty[$).
- On a $|f(x)| = ||C| + 1| = |C| + 1 > |C| \geq C$.

Exercice 3

On considère l'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 \\ A \mapsto (\{n \in \mathbb{N} \mid 2n \in A\}, \{n \in \mathbb{N} \mid 2n+1 \in A\}) \end{cases}$.

1. Montrer que l'application φ est bijective.

Injectivité. Soit $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tel que $\varphi(X_1) = \varphi(X_2)$. On en déduit

$$\begin{aligned} P_1 &:= \{n \in \mathbb{N} \mid 2n \in X_1\} = \{n \in \mathbb{N} \mid 2n \in X_2\} =: P_2 \\ I_1 &:= \{n \in \mathbb{N} \mid 2n+1 \in X_1\} = \{n \in \mathbb{N} \mid 2n+1 \in X_2\} =: I_2 \end{aligned}$$

Montrons $X_1 = X_2$, par double inclusion.

Inclusion directe. Soit $x \in X_1$. On distingue deux cas.

- Si x est pair, on peut trouver $m \in \mathbb{N}$ tel que $x = 2m$.
Par définition de P_1 , cela signifie que $m \in P_1$. On en déduit que $m \in P_2$, c'est-à-dire que $x = 2m \in X_2$.
- Si x est impair, on peut trouver $m \in \mathbb{N}$ tel que $x = 2m+1$.

On a de même $m \in I_1$, donc $m \in I_2$, donc $x = 2m+1 \in X_2$.

On a ainsi montré $X_1 \subseteq X_2$.

Inclusion réciproque. Par symétrie, X_1 et X_2 jouant des rôles parfaitement symétriques, on montre de même l'inclusion $X_2 \subseteq X_1$.

Surjectivité. Soit $Y = (P, I) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2$. Montrons $\exists X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \varphi(X) = (P, I)$.

Candidat : $X = \{2n \mid n \in P\} \cup \{2n + 1 \mid n \in I\}$.

- On a manifestement $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- Montrons $\varphi(X) = (P, I)$, c'est-à-dire $\{n \in \mathbb{N} \mid 2n \in X\} = P$ et $\{n \in \mathbb{N} \mid 2n + 1 \in X\} = I$.

- Montrons la première égalité, par double inclusion.

▷ Soit $m \in \{n \in \mathbb{N} \mid 2n \in X\}$.

On a donc $2m \in X$. Par définition de $X = \{2n \mid n \in P\} \cup \{2n + 1 \mid n \in I\}$, on distingue deux cas.

- Si $2m \in \{2n \mid n \in P\}$, on peut trouver $n \in P$ tel que $2m = 2n$.

On en déduit $m = n$, puis $m \in P$.

- Si $2m \in \{2n + 1 \mid n \in I\}$, on peut trouver $n \in I$ tel que $2m = 2n + 1$. Mais cette égalité est absurde (les deux nombres n'ont pas la même parité) donc ce cas ne se produit en fait pas.

Ainsi, $m \in P$.

▷ Réciproquement, soit $m \in P$.

On a donc $2m \in \{2n \mid n \in P\}$, donc a fortiori $2m \in X$.

Ainsi, $m \in \{n \in \mathbb{N} \mid 2n \in X\}$.

- L'égalité $\{n \in \mathbb{N} \mid 2n + 1 \in X\} = I$ se démontre exactement de la même façon.

Cela conclut la démonstration de la bijectivité de φ .

2.⁺ Déterminer les parties $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ telles que $\varphi(A) = (A, A)$.

Il est relativement clair que $\varphi(\emptyset) = (\emptyset, \emptyset)$ et $\varphi(\mathbb{N}) = (\mathbb{N}, \mathbb{N})$. On va montrer que ce sont les deux seules parties qui conviennent.

Pour ce faire, soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ telle que $\varphi(A) = (A, A)$. Cela signifie exactement

$$\{n \in \mathbb{N} \mid 2n \in A\} = A = \{n \in \mathbb{N} \mid 2n + 1 \in A\},$$

c'est-à-dire la double équivalence

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2n \in A \Leftrightarrow n \in A \Leftrightarrow 2n + 1 \in A. \quad (\clubsuit)$$

On va supposer A non vide et montrer $A = \mathbb{N}$. D'après le résultat admis dans l'indication, on sait que A possède un plus petit élément, que l'on va noter m .

Étape 1. Montrons $m = 0$. On distingue pour ce faire deux cas.

- Si m est pair, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2n$. D'après $(\clubsuit)$, l'entier n appartient aussi à A , donc $2n = m \leq n$. On en déduit $n \leq 0$, c'est-à-dire $n = 0$, puis $m = 0$.
- Si m est impair, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2n + 1$. D'après $(\clubsuit)$, l'entier n appartient aussi à A , donc $2n + 1 = m \leq n$. On en déduit $n \leq -1$, une absurdité. Ainsi, ce cas ne se produit pas.

On a donc montré $m = 0$.

Étape 2. L'inclusion $A \subseteq \mathbb{N}$ étant automatique, il suffit de montrer $\mathbb{N} \subseteq A$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ l'assertion « $n \in A$ ». Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ par récurrence forte.

Initialisation. D'après l'étape précédente, le plus petit élément de A est 0. A fortiori, $0 \in A$, ce qui montre $P(0)$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(0), P(1), \dots, P(n)$ soient vraies. Montrons $P(n+1)$. On distingue deux cas.

- Si $n+1$ est pair, on peut trouver $m \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2m$. Cela entraîne que m est non nul (sinon, $n+1 = 0$, absurde), donc $m < 2m = n+1$, puis $m \leq n$.

Ainsi, $P(m)$ est vraie, c'est-à-dire que $m \in A$. D'après (), $n+1 = 2m \in A$.

- Si $n+1$ est impair, on peut trouver $m \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2m+1$.

Comme $0 \leq 2m < 2m+1$, on a $P(2m)$ c'est-à-dire $2m \in A$. Grâce à (), on en déduit l'appartenance $n+1 = 2m+1 \in A$.

Dans les deux cas, on a montré $n+1 \in A$, ce qui montre $P(n+1)$, et clôt la récurrence.

Problème. Module d'une somme de nombres complexes.

Partie I. Retour sur l'inégalité triangulaire.

1. Dans cette question, on propose une autre démonstration de l'inégalité triangulaire. Il est donc interdit de l'utiliser!

- (a) Montrer $\forall z \in \mathbb{C}, |z+1| \leq |z|+1$.

Soit $z \in \mathbb{C}$, que l'on écrit $a+ib$ sous forme algébrique. On a

$$\begin{aligned} |z+1|^2 &= (a+1)^2 + b^2 = a^2 + 2a + 1 + b^2 \\ \text{donc } (|z|+1)^2 &= \left(\sqrt{a^2+b^2}+1\right)^2 = a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2+b^2} + 1 \\ \text{donc } (|z|+1)^2 - |z+1|^2 &= 2\left(\sqrt{a^2+b^2} - a\right). \end{aligned}$$

Or, $a \leq |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2+b^2}$, par croissance de $\sqrt{\cdot}$.

Cela montre $(|z|+1)^2 - |z+1|^2 \geq 0$, c'est-à-dire $|z+1|^2 \leq (|z|+1)^2$.

On conclut par croissance de $\sqrt{\cdot}$.

- (b) En utilisant la question précédente et la propriété $\forall u, v \in \mathbb{C}, |uv| = |u||v|$, donner une nouvelle démonstration de l'inégalité triangulaire $\forall z, w \in \mathbb{C}, |z+w| \leq |z|+|w|$.

Soit $z, w \in \mathbb{C}$.

- Si $w = 0$, l'inégalité $|z+w| \leq |z|+|w|$ est évidente (et c'est une égalité).
- Sinon, on écrit $|z+w| = \left|w \left(\frac{z}{w} + 1\right)\right| = |w| \left|\frac{z}{w} + 1\right|$.

$$\text{D'après la question précédente, } \left|\frac{z}{w} + 1\right| \leq \left|\frac{z}{w}\right| + 1 = \frac{|z|}{|w|} + 1.$$

En multipliant de part et d'autre par le nombre positif $|w|$, on obtient $|z+w| \leq |z|+|w|$.

Comme on l'a vu en cours, cela entraîne, par une récurrence immédiate, la généralisation à plusieurs termes $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}, \left|\sum_{k=1}^n z_k\right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$, que l'on pourra utiliser librement.

2. **Somme signée : deux vecteurs.** Soit $z, w \in \mathbb{C}$.

(a) Exprimer $|z + w|^2$ à l'aide notamment de $\text{Ré}(\bar{z}w)$.

On a

$$|z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + \underbrace{z\bar{w} + w\bar{z}}_{=\bar{z}w + \bar{z}w} + w\bar{w} = |z|^2 + 2 \text{Ré}(\bar{z}w) + |w|^2.$$

(b) Utiliser la formule précédente pour simplifier $|z + w|^2 + |z - w|^2$.

En utilisant deux fois la question précédente,

$$\begin{aligned} |z + w|^2 + |z - w|^2 &= (|z|^2 + 2 \text{Ré}(\bar{z}w) + |w|^2) + (|z|^2 + 2 \text{Ré}(\bar{z}(-w)) + |-w|^2) \\ &= 2|z|^2 + 2|w|^2 + 2 \text{Ré}(\bar{z}w) - 2 \text{Ré}(\bar{z}w) \\ &= 2|z|^2 + 2|w|^2. \end{aligned}$$

(c) En déduire l'existence d'un signe $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel que $|z + \varepsilon w| \leq \sqrt{|z|^2 + |w|^2} \leq |z - \varepsilon w|$.

Les deux nombres $|z \pm w|^2$ ont pour moyenne $|z|^2 + |w|^2$, d'après la question précédente. On en déduit

$$\min(|z + w|^2, |z - w|^2) \leq |z|^2 + |w|^2 \leq \max(|z + w|^2, |z - w|^2).$$

Si l'on note $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ le signe tel que $|z + \varepsilon w|^2$ soit le plus petit des deux nombres, cette inégalité se réécrit

$$|z + \varepsilon w|^2 \leq |z|^2 + |w|^2 \leq |z - \varepsilon w|^2$$

et on conclut par croissance de $\sqrt{\cdot}$.

3. **Premier cas extrême (annulation).** Soit $n \geq 2$. Trouver

Notons $(z_k)_{k=1}^n$ les racines n -ièmes de l'unité : pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on écrit $z_k = \exp\left(i \frac{2\pi}{n} k\right)$. Comme $\exp\left(i \frac{2\pi}{n} 0\right) = 1 = \exp\left(i \frac{2\pi}{n} n\right)$, le fait de les numérotter de 1 à n (et non pas de 0 à $n - 1$, comme le veut la tradition) n'a aucune importance.

Il s'agit de nombres complexes de module 1. D'après le cours, $\sum_{k=1}^n z_k = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$, car $n \geq 2$.

4. **Deuxième cas extrême (balistique).** Montrer que

$$\forall n \geq 2, \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{U}, \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \Rightarrow z_1 = z_2 = \dots = z_n.$$

Pour tout $n \geq 2$, on note $P(n)$ l'assertion

$$\forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{U}, \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \Rightarrow z_1 = z_2 = \dots = z_n.$$

Montrons $\forall n \geq 2, P(n)$ par récurrence.

Initialisation. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$ tels que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ ($= 2$). D'après le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, on en déduit que z_1 et z_2 sont positivement colinéaires. Comme $z_1 \neq 0$, cela se traduit par l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_2 = \lambda z_1$.

En passant au module, on obtient $|\lambda| = 1$. Comme λ est un réel positif, on en déduit $\lambda = 1$, c'est-à-dire $z_1 = z_2$.

Cela conclut la démonstration de $P(2)$.

Hérédité. Soit $n \geq 2$ tel que $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.

Soit $z_1, \dots, z_{n+1} \in \mathbb{U}$ tels que $\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$ ($= n+1$).

Posons $w = \sum_{k=1}^n z_k$. L'inégalité triangulaire entraîne que $|w| = \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k| = n$.

Or, $n+1 = \left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = |w + z_{n+1}| \leq |w| + |z_{n+1}| \leq n+1$.

Cela entraîne que les deux inégalités dans cette chaîne sont des égalités, c'est-à-dire que $|w| = n$ et que w et z_{n+1} sont positivement colinéaires.

En comparant les modules, cela entraîne que $w = n z_{n+1}$.

Par ailleurs, l'égalité $|w| = n$ et l'assertion $P(n)$ montrent que $z_1 = \dots = z_n$.

L'égalité $w = n z_{n+1}$ montre alors que $n z_n = n z_{n+1}$, c'est-à-dire $z_n = z_{n+1}$.

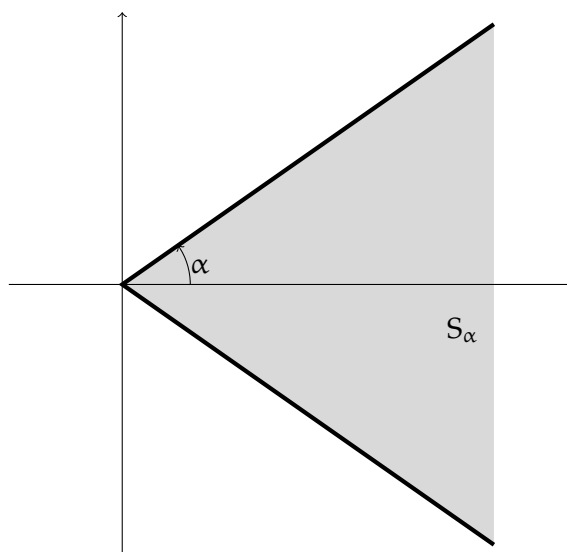
On a donc montré $z_1 = \dots = z_n = z_{n+1}$.

Cela conclut la démonstration de $P(n+1)$, et donc la récurrence !

Partie II. Vecteurs dans un secteur angulaire.

On fixe $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on note $S_\alpha = \left\{ r e^{i\theta} \mid r \in \mathbb{R}_+, \theta \in [-\alpha, \alpha] \right\}$.

5. Dessiner l'ensemble S_α .



6. Montrer que $\forall z \in S_\alpha, \operatorname{Ré}(z) \geq \cos(\alpha) |z|$.

Soit $z \in S_\alpha$. On peut donc trouver $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in [-\alpha, \alpha]$ (si bien que $r = |z|$).

On en déduit $\operatorname{Ré} z = r \cos(\theta)$.

Or, comme $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$, la fonction cosinus est croissante sur $[-\alpha, 0]$, puis décroissante sur $[0, \alpha]$. On en déduit que $\cos(\theta) \geq \min(\cos(-\alpha), \cos(\alpha)) = \cos \alpha$.

En multipliant cette inégalité par le nombre positif r , on a $\operatorname{Ré} z = r \cos(\theta) \geq r \cos(\alpha) = \cos(\alpha) |z|$.

7. Soit $n \geq 1$ et $z_1, \dots, z_n \in S_\alpha$. Montrer $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \geq \cos(\alpha) \sum_{k=1}^n |z_k|$.

On a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| &\geq \operatorname{Ré} \sum_{k=1}^n z_k && (\text{car } \forall w \in \mathbb{C}, \operatorname{Ré} w \leq |w|) \\ &\geq \sum_{k=1}^n \operatorname{Ré}(z_k) \\ &\geq \sum_{k=1}^n \cos(\alpha) |z_k| && (\text{question précédente}) \\ &\geq \cos(\alpha) \sum_{k=1}^n |z_k|. \end{aligned}$$

Partie III. Minoration d'une moyenne.

Dans cette section, on note $\psi : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |\cos(x)| + |\sin(x)| \end{cases}$.

8. Symétries.

(a) La fonction ψ est-elle paire? Est-elle impaire?

► La fonction ψ est paire. Montrons-le.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\psi(-x) = |\cos(-x)| + |\sin(-x)| = |\cos(x)| + |-\sin(x)| = |\cos(x)| + |\sin(x)| = \psi(x).$$

► La fonction ψ n'est pas impaire. En effet, $\psi(0) = 1$, alors que toute fonction impaire g définie sur $\mathbb{R}$ vérifie $g(0) = g(-0) = -g(0)$, donc $g(0) = 0$.

(b) Trouver un nombre réel $T > 0$ tel que ψ soit T -périodique, mais pas $(T/2)$ -périodique.

Candidat : $T = \frac{\pi}{2}$ (qui est bien > 0).

► La fonction ψ est $\frac{\pi}{2}$ -périodique. Montrons-le.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\psi\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| = |-\sin(x)| + |\cos(x)| = \psi(x).$$

► La fonction n'est pas $\frac{\pi}{4}$ -périodique. En effet,

$$\psi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left|\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| + \left|\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \neq 1 = \psi(0).$$

9. Trouver $A \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) + \sin(x) = A \cos(x + \varphi)$.

Candidats : $A = \sqrt{2}$ et $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ (obtenus après un calcul au brouillon dont nul ne pourra jamais vérifier la rigueur logique).

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après les formules d'addition :

$$\begin{aligned} A \cos(x + \varphi) &= \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos(x) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(x) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= \cos(x) + \sin(x), \end{aligned}$$

$$\text{car } \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

10. Dédurre de ce qui précède la minoration $\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) \geq 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Le segment $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ étant de longueur $\frac{\pi}{2}$, on peut trouver $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ tel que $x \equiv x_0 \pmod{\pi/2}$.

On en déduit

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \psi(x_0) && (\text{car } \psi \text{ est } \frac{\pi}{2}\text{-périodique}) \\ &= \psi(|x_0|) && \text{car } \psi \text{ est paire} \\ &= \sqrt{2} \cos\left(|x_0| - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Or, $|x_0| \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, donc $|x_0| - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$, donc $\cos\left(|x_0| - \frac{\pi}{4}\right) \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ par croissance de la fonction cosinus sur le segment $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$.

On en déduit $\psi(x) \in [1, \sqrt{2}]$, ce qui montre en particulier $\psi(x) \geq 1$.

11. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{4} \sum_{\ell=0}^3 \left| \cos\left(x + \ell \frac{\pi}{2}\right) \right| \geq \frac{1}{2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^3 \left| \cos\left(x + \ell \frac{\pi}{2}\right) \right| &= |\cos(x)| + \left| \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right| + |\cos(x + \pi)| + \left| \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \right| \\ &= |\cos(x)| + |-\sin(x)| + |-\cos(x)| + |\sin(x)| \\ &= 2\psi(x) \geq 2, \end{aligned}$$

$$\text{donc } \frac{1}{4} \sum_{\ell=0}^3 \left| \cos\left(x + \ell \frac{\pi}{2}\right) \right| \geq \frac{1}{2}.$$

Partie IV. Somme signée de vecteurs : expansion.

Dans cette partie, on fixe $n \geq 1$ et n nombres complexes $z_1, \dots, z_n$. Le but est de montrer qu'il existe des signes $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ tels que $\left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k z_k \right| \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n |z_k|$.

On fixe quelques notations :

- pour tout indice $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit $r_k \in \mathbb{R}_+$ et $\theta_k \in \mathbb{R}$ tels que $z_k = r_k e^{i\theta_k}$;
- soit $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ tels que le complexe $Z_{\max} := \sum_{k=1}^n \varepsilon_k z_k$ ait le plus grand module possible.

12. Soit $u \in \mathbb{U}$.

(a) Montrer qu'il existe $\zeta_1, \dots, \zeta_n \in \{\pm 1\}$ tels que $\sum_{k=1}^n |\operatorname{Ré}(u z_k)| = \operatorname{Ré}\left(u \sum_{k=1}^n \zeta_k z_k\right)$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la quantité $\operatorname{Ré}(u z_k)$ est un nombre réel, donc on peut trouver $\zeta_k \in \{\pm 1\}$ (son signe s'il est non nul, n'importe lequel sinon) tel que $\zeta_k \operatorname{Ré}(u z_k) \geq 0$.

Comme on n'a pas changé la valeur absolue du nombre en le multipliant par ± 1 , on a donc bien construit, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, un signe $\zeta_k \in \{\pm 1\}$ tel que $\zeta_k \operatorname{Ré}(u z_k) = |\operatorname{Ré}(u z_k)|$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \operatorname{Ré}\left(u \sum_{k=1}^n \zeta_k z_k\right) &= \operatorname{Ré} \sum_{k=1}^n \zeta_k u z_k && \text{(linéarité de la somme)} \\ &= \sum_{k=1}^n \zeta_k \operatorname{Ré}(u z_k) && \mathbb{R}\text{-linéarité de Ré} \\ &= \sum_{k=1}^n |\operatorname{Ré}(u z_k)|. \end{aligned}$$

(b) En déduire $\sum_{k=1}^n |\operatorname{Ré}(u z_k)| \leq |Z_{\max}|$.

D'après la question précédente et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{k=1}^n |\operatorname{Ré}(u z_k)| = \operatorname{Ré}\left(u \sum_{k=1}^n \zeta_k z_k\right) \stackrel{CS}{\leq} |\bar{u}| \left| \sum_{k=1}^n \zeta_k z_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n \zeta_k z_k \right|.$$

Or, par définition de $Z_{\max}$, ce dernier module est $\leq \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k z_k \right| = |Z_{\max}|$.

13. Montrer $\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^n r_k |\cos(t + \theta_k)| \leq |Z_{\max}|$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Le nombre $u = e^{it}$ est de module 1 et, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Ré}(u z_k) &= \operatorname{Ré}\left[e^{it} (r_k e^{i\theta_k})\right] = r_k \operatorname{Ré}\left[e^{i(t+\theta_k)}\right] = r_k \cos(t + \theta_k) \\ \text{donc} \quad |\operatorname{Ré}(u z_k)| &= r_k |\cos(t + \theta_k)|. \end{aligned}$$

En appliquant à ce nombre complexe l'inégalité de la question précédente, on a donc

$$|Z_{\max}| \geq \sum_{k=1}^n |\operatorname{Ré}(u z_k)| = \sum_{k=1}^n r_k |\cos(t + \theta_k)|.$$

14. En utilisant l'inégalité de la partie précédente, en déduire $|Z_{\max}| \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n r_k$.

Pour tout $\ell \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, on peut appliquer l'assertion de la question précédente à $t = \ell \frac{\pi}{2}$ et obtenir

$$\sum_{k=1}^n r_k \left| \cos \left(\theta_k + \ell \frac{\pi}{2} \right) \right| \leq |Z_{\max}|.$$

En sommant ces inégalités (ou plutôt en en faisant la moyenne), on obtient donc

$$\frac{1}{4} \sum_{\ell=0}^3 \sum_{k=1}^n r_k \left| \cos \left(\theta_k + \ell \frac{\pi}{2} \right) \right| \leq |Z_{\max}|.$$

Or, on peut échanger les symboles somme :

$$\frac{1}{4} \sum_{\ell=0}^3 \sum_{k=1}^n r_k \left| \cos \left(\theta_k + \ell \frac{\pi}{2} \right) \right| = \sum_{k=1}^n r_k \underbrace{\frac{1}{4} \sum_{\ell=0}^3 \left| \cos \left(\theta_k + \ell \frac{\pi}{2} \right) \right|}_{\geq 1/2} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n r_k,$$

ce qui fournit l'inégalité attendue $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n r_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n |z_k| \leq |Z_{\max}|$.

Remarque. En remplaçant l'inégalité de la partie précédente par l'égalité $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos(t)| dt = \frac{2}{\pi}$, on pourrait remplacer la constante $\frac{1}{2}$ par $\frac{2}{\pi} \approx 0,637$, qui est optimale.

Partie V. Somme signée de vecteurs : confinement.

Dans cette partie, on fixe $n \geq 1$ et n nombres complexes $z_1, \dots, z_n$. Le but est de montrer qu'il existe des signes $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ tels que $\left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k z_k \right| \leq \sqrt{2} \max(|z_1|, \dots, |z_n|)$.

15. Démontrer le résultat annoncé dans le cas $n = 2$.

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Notons $M = \max(|z_1|, |z_2|)$.

D'après la question 2c, on peut trouver $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel que

$$|z_1 + \varepsilon z_2| \leq \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2} \leq \sqrt{2M^2} \leq \sqrt{2} M,$$

par croissance des fonctions $t \mapsto t^2$ (sur $\mathbb{R}_+$) et $\sqrt{\cdot}$.

Cela démontre le résultat (en prenant $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_2 = \varepsilon$).

16. (a) Soit $r \in [0, 1]$ et $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$. Montrer que $|1 - r e^{i\theta}| \leq 1$.

On a

$$\begin{aligned} 1 - |1 - r e^{i\theta}|^2 &= 1 - (1 - r e^{i\theta})(1 - r e^{-i\theta}) \\ &= 1 - [1 - r(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + r^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - (1 - 2r \cos(\theta) + r^2) \\
&= 2r \cos(\theta) - r^2 \\
&= \underbrace{r}_{\geq 0} (2 \cos(\theta) - r).
\end{aligned}$$

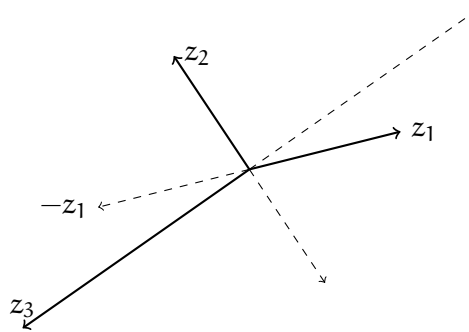
Or, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, donc $\cos(\theta) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, donc $2 \cos(\theta) - r \geq 0$.

Cela entraîne $|1 - r e^{i\theta}|^2 \leq 1$, et on conclut par croissance de $\sqrt{\cdot}$.

(b) Soit $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ de module ≤ 1 .

Montrer qu'il existe deux indices distincts $k \neq \ell$ dans $\{1, 2, 3\}$ et un signe $\zeta \in \{\pm 1\}$ tels que l'on ait $|z_k + \zeta z_\ell| \leq 1$.

L'énoncé est trivial si l'un des vecteurs est nul, donc on suppose dans la suite que ça n'est pas le cas. En considérant les $\pm z_k$, on a donc six nombres complexes, que l'on peut voir comme six vecteurs du plan.



Le point-clef est que le plus petit angle apparaissant sur cette figure vaut au plus un sixième de tour. Rédigeons cela précisément (peut-être un peu trop?).

On écrit ces six nombres sous forme exponentielle : on peut trouver $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_6 < 2\pi$ et $r_1, \dots, r_6 > 0$ tels que les six nombres soient les éléments de la famille $(r_k e^{i\theta_k})_{k=1}^6$ (dans un certain ordre).

Remarquons que les différences $\alpha_1 = \theta_2 - \theta_1, \dots, \alpha_5 = \theta_6 - \theta_5$ et $\alpha_6 = (2\pi + \theta_1) - \theta_6$ s'interprètent comme les mesures des angles délimités par nos vecteurs.

Il s'agit de six nombres positifs dont la somme est (par télescopage) précisément 2π . Le plus petit des six, que l'on note β , vaut donc au plus $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Naturellement, cet angle n'est pas celui entre un vecteur de la forme z_k et son opposé (qui vaut toujours π) : on a donc trouvé $k \neq \ell$ et deux signes $\eta_k, \eta_\ell \in \{\pm 1\}$ tels que nos deux nombres s'écrivent sous la forme $\eta_k z_k$ et $\eta_\ell z_\ell$. On a donc $\arg(\eta_\ell z_\ell) - \arg(\eta_k z_k) \equiv \beta \pmod{2\pi}$.

Quitte à les échanger (ce qui remplacera l'angle β par son opposé), on suppose que $|z_k| \geq |z_\ell|$. Le quotient $\frac{\eta_\ell z_\ell}{\eta_k z_k}$ est donc un nombre complexe de module $r \leq 1$ et d'argument $\theta := \pm \beta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$.

En utilisant la question précédente, on obtient

$$|\eta_k z_k - \eta_\ell z_\ell| = \left| \eta_k z_k \left(1 - \frac{\eta_\ell z_\ell}{\eta_k z_k} \right) \right| = |z_k| |1 - r e^{i\theta}| \leq |z_k| \leq 1.$$

Comme $|\eta_k z_k - \eta_\ell z_\ell| = |\eta_k^2 z_k - \eta_k \eta_\ell z_\ell| = |z_k - \eta_k \eta_\ell z_\ell|$, on obtient le résultat voulu, en posant $\zeta = \eta_k \eta_\ell \in \{\pm 1\}$.

17. Conclure.

Pour tout $n \geq 2$, on note $P(n)$ l'assertion :

quels que soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, de module ≤ 1 , on peut trouver des signes $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$
tels que $\left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k z_k \right| \leq \sqrt{2}$.

Nous allons montrer $\forall n \geq 2, P(n)$ par récurrence.

Initialisation. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, de module ≤ 1 . D'après la question 15, on peut trouver $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$

tels que $\left| \sum_{k=1}^2 \varepsilon_k z_k \right| \leq \sqrt{2} \max(|z_1|, |z_2|) \leq \sqrt{2}$, ce qui montre $P(2)$.

Hérédité. Soit $n \geq 2$ tel que $P(n)$. Soit $z_1, \dots, z_n, z_{n+1} \in \mathbb{C}$, de module ≤ 1 .

La question précédente nous donne $k \neq \ell \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et $\zeta \in \{\pm 1\}$ tels que $|z_k + \zeta z_\ell| \leq 1$.

Quitte à permuter les nombres complexes (ce qui ne change pas la difficulté de l'énoncé à démontrer), on va supposer pour simplifier $k = n$ et $k+1 = n+1$. Notons enfin $w = z_n + \zeta z_{n+1}$.

D'après $P(n)$, appliquée à $z_1, \dots, z_{n-1}, w$, on peut alors trouver $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ tels que

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k z_k + \varepsilon_n w \right| \leq \sqrt{2}.$$

En remplaçant w par sa valeur, on obtient donc

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k z_k + \varepsilon_n z_n + \zeta \varepsilon_n z_{n+1} \right| \leq \sqrt{2},$$

ce qui conclut, en posant $\varepsilon_{n+1} = \zeta \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$.

On a donc montré $P(n+1)$, ce qui clôt la récurrence.

Revenons maintenant à l'énoncé : soit $n \geq 1$ et $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ et notons $M = \max(|z_1|, \dots, |z_n|)$.

- Si $n = 1$, l'énoncé est immédiat, car $M = |z_1|$ et $1 \leq \sqrt{2}$. On peut d'ailleurs choisir n'importe lequel des deux signes.
- Si $M = 0$, tous les vecteurs sont nuls et l'énoncé à démontrer est presque insultant.
- On peut donc supposer $n \geq 2$ et $M > 0$.

Les vecteurs $\dot{z}_k := \frac{z_k}{M}$ (pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$) sont tous de module ≤ 1 , donc on peut utiliser $P(n)$: on

peut trouver $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ tels que $\left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \dot{z}_k \right| \leq \sqrt{2}$.

En multipliant de part et d'autre par M , on obtient $\left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k z_k \right| \leq \sqrt{2} M$, ce qui conclut.