Deuxième composition de mathématiques

Durée : *4 heures.*

Toute sortie est interdite pendant les dix dernières minutes.

Quelle que soit la manière dont la question est posée (« Trouver... », « Vérifier que... », « La fonction est-elle paire ? », etc.), les réponses doivent être parfaitement justifiées. Une réponse non justifiée, vraie ou fausse, ne rapporte pas de point.

Les documents, calculatrices, etc. sont ***interdits****.*

Consignes générales de présentation

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci* $\boxed{\textit{d'encadrer}}$ *ou de* <u>*souligner*</u> *vos résultats.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.*
- *Les parties trop difficiles à lire de votre copie ne seront pas lues.*

Exercice 1. Interro de calcul du vendredi.

Les questions de l'exercice sont indépendantes. La rigueur logique des arguments et la présentation des calculs seront évaluées de manière plus stricte que dans les interrogations de calcul usuelles.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos(x)^6$.
2. (a) Montrer $\forall \ell \in \mathbb{Z}, \dfrac{1+(-1)^\ell}{2} = \mathbb{1}_{(\ell \text{ pair})}$.

   (b) Soit $q \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{\substack{k \in [\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} q^k$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes doubles :

   (a) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i\, j^2$, (b) $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (2i-1)\, j$.

Exercice 2

Les questions de l'exercice sont indépendantes. La rigueur logique de la rédaction sera évaluée minutieusement !

1. Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application. Montrer, par double implication :

$$f \circ f = f \Leftrightarrow \forall y \in f[E], f(y) = y.$$

2. Soit E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications. Montrer l'équivalence

$$g \circ f \text{ injective} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ injective} \\ g_{|f[E]} \text{ injective.} \end{cases}$$

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subseteq A_{n+1}$.

   (a) Montrer que f est croissante si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction de f à A_n est croissante.

   (b) Construire un exemple de suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ montrant que la question précédente devient fausse en remplaçant « croissante » par « bornée ».

Exercice 3

Cet exercice est plus difficile, et surtout plus abstrait. Il est sans doute rentable d'aller d'abord voir le problème...

On considère l'application $\varphi : \begin{cases} \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to & \mathscr{P}(\mathbb{N})^2 \\ A \mapsto & \big(\{n \in \mathbb{N} \,|\, 2n \in A\}, \{n \in \mathbb{N} \,|\, 2n+1 \in A\}\big). \end{cases}$

1. Montrer que l'application φ est bijective.

2.$^+$ Déterminer les parties $A \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ telles que $\varphi(A) = (A, A)$.

   Indication. *On pourra admettre et utiliser que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément.*

Problème. Module d'une somme de nombres complexes.

Partie I. Retour sur l'inégalité triangulaire.

1. Dans cette question, on propose une autre démonstration de l'inégalité triangulaire. Il est donc interdit de l'utiliser !
   (a) Montrer $\forall z \in \mathbb{C}, \left|z+1\right| \leqslant |z| + 1$.
   (b) En utilisant la question précédente et la propriété $\forall u, v \in \mathbb{C}, \left|u\,v\right| = |u|\,|v|$, donner une nouvelle démonstration de l'inégalité triangulaire $\forall z, w \in \mathbb{C}, \left|z+w\right| \leqslant |z| + |w|$.

Comme on l'a vu en cours, cela entraîne, par une récurrence immédiate, la généralisation à plusieurs termes $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}, \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$, que l'on pourra utiliser librement.

2. **Somme signée : deux vecteurs.** Soit $z, w \in \mathbb{C}$.
   (a) Exprimer $\left|z+w\right|^2$ à l'aide notamment de $\text{Ré}\left(\overline{z}\,w\right)$.
   (b) Utiliser la formule précédente pour simplifier $\left|z+w\right|^2 + \left|z-w\right|^2$.
   (c) En déduire l'existence d'un signe $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tel que $\left|z+\varepsilon w\right| \leqslant \sqrt{|z|^2+|w|^2} \leqslant \left|z-\varepsilon w\right|$.
3. **Premier cas extrême (annulation).** Soit $n \geqslant 2$. Trouver* $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{U}$ tels que $\sum_{k=1}^{n} z_k = 0$.
4. **Deuxième cas extrême (balistique).** Montrer que

$$\forall n \geqslant 2, \forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{U}, \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \Rightarrow z_1 = z_2 = \dots = z_n.$$

Partie II. Vecteurs dans un secteur angulaire.

On fixe $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on note $S_\alpha = \left\{ r\,e^{i\theta} \,\middle|\, r \in \mathbb{R}_+, \theta \in [-\alpha, \alpha] \right\}$.

5. Dessiner l'ensemble S_α.
6. Montrer que $\forall z \in S_\alpha, \text{Ré}(z) \geqslant \cos(\alpha)\,|z|$.
7. Soit $n \geqslant 1$ et $z_1, \dots, z_n \in S_\alpha$. Montrer $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \geqslant \cos(\alpha) \sum_{k=1}^{n} \left|z_k\right|$.

Partie III. Minoration d'une moyenne.

Dans cette section, on note $\psi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left|\cos(x)\right| + \left|\sin(x)\right|. \end{cases}$

8. **Symétries.**
   (a) La fonction ψ est-elle paire ? Est-elle impaire ?
   (b) Trouver un nombre réel $T > 0$ tel que ψ soit T-périodique, mais pas $(T/2)$-périodique.
9. Trouver $A \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) + \sin(x) = A\,\cos\left(x+\varphi\right)$.
10. Déduire de ce qui précède la minoration $\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) \geqslant 1$.
11. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{4}\sum_{\ell=0}^{3} \left|\cos\left(x + \ell\frac{\pi}{2}\right)\right| \geqslant \frac{1}{2}$.

---

*. On rappelle que $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Partie IV. Somme signée de vecteurs : expansion.

Dans cette partie, on fixe $n \geqslant 1$ et n nombres complexes $z_1, \ldots, z_n$. Le but est de montrer qu'il existe des signes $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ tels que $\left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k \right| \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

On fixe quelques notations :

- pour tout indice $k \in [\![1, n]\!]$, soit $r_k \in \mathbb{R}_+$ et $\theta_k \in \mathbb{R}$ tels que $z_k = r_k e^{i\theta_k}$;
- soit $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ tels que le complexe $Z_{\max} := \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k$ ait le plus grand module possible.

12. Soit $u \in \mathbb{U}$.
    (a) Montrer qu'il existe $\zeta_1, \ldots, \zeta_n \in \{\pm 1\}$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \left|\text{Ré}(u z_k)\right| = \text{Ré}\left(u \sum_{k=1}^{n} \zeta_k z_k\right)$.
    (b) En déduire $\sum_{k=1}^{n} \left|\text{Ré}(u z_k)\right| \leqslant |Z_{\max}|$.
13. Montrer $\forall t \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{n} r_k \left|\cos(t + \theta_k)\right| \leqslant \left|Z_{\max}\right|$.
14. En utilisant l'inégalité de la partie précédente, en déduire $\left|Z_{\max}\right| \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} r_k$.

Remarque. En remplaçant l'inégalité de la partie précédente par l'égalité $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\cos(t)\right| \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}$, on pourrait remplacer la constante $\frac{1}{2}$ par $\frac{2}{\pi} \approx 0{,}637$, qui est optimale.

Partie V. Somme signée de vecteurs : confinement.

Dans cette partie, on fixe $n \geqslant 1$ et n nombres complexes $z_1, \ldots, z_n$. Le but est de montrer qu'il existe des signes $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ tels que $\left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k z_k \right| \leqslant \sqrt{2} \max\left(|z_1|, \ldots, |z_n|\right)$.

15. Démontrer le résultat annoncé dans le cas $n = 2$.
16. (a) Soit $r \in [0, 1]$ et $\theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$. Montrer que $\left|1 - r e^{i\theta}\right| \leqslant 1$.
    (b) Soit $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ de module $\leqslant 1$.

    Montrer qu'il existe deux indices distincts $k \neq \ell$ dans $\{1, 2, 3\}$ et un signe $\zeta \in \{\pm 1\}$ tels que l'on ait $\left|z_k + \zeta z_\ell\right| \leqslant 1$.
17. Conclure.