Troisième composition de mathématiques [corrigé]

Exercice 1

1. Calculer le $DL_5(0)$ de $x \mapsto e^{x^2} \sin(x)$.

   On a

$$e^{x^2} \sin(x) = \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \quad \textit{car} \begin{cases} e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + o(u^2) \\ x^2 \underset{x\to\infty}{\sim} x^2 \ldots \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^5) \\ + x^3 - \dfrac{x^5}{6} \\ + \dfrac{x^5}{2} \end{pmatrix}$$

$$= x + \frac{5}{6}x^3 + \frac{41}{120}x^5 + o(x^5).$$

2. Calculer le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$.

   On a

$$\sqrt{\cos(x)} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o(x^4)$$

$$\textit{car} \begin{cases} \sqrt{1+u} = 1 + \dfrac{1}{2}u - \dfrac{1}{8}u^2 + o(u^2) \\ -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4) \underset{x\to\infty}{\sim} -\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^4}{48} + o(x^4) \\ - \dfrac{x^4}{32} \end{pmatrix}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} + o(x^4).$$

Exercice 2

Dans cet exercice, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{1}{i+j}$.

1. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{2} \leqslant S_n \leqslant \dfrac{n^2}{2}$.

   Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, *on a* $2 \leqslant i + j \leqslant 2n$, *donc* $\dfrac{1}{2n} \leqslant \dfrac{1}{i+j} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   En sommant ces inégalités (ce qui revient à encadrer grossièrement la somme S_n*, qui possède* n^2 *termes), il vient*

$$\frac{n}{2} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{1}{2n} \leqslant S_n \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{1}{2} = \frac{n^2}{2}.$$

Le but de cet exercice est d'améliorer significativement cette majoration, sans calculer exactement S_n.

2. (a) **Question de cours.** Montrer $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[$, $\ln(1 + x) \leqslant x$.

   Cf. cours.☺

   (b) En utilisant la question précédente, montrer

   - $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k} \geqslant \ln(k + 1) - \ln(k)$;
   - $\forall k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k - 1)$.

   - *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$. *On a*

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k}.$$

   - *Soit* $k \geqslant 2$. *On a* $-\dfrac{1}{k} > 1$ *donc*

$$\ln(k-1) - \ln(k) = \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \leqslant -\frac{1}{k}.$$

   En multipliant par -1, *on obtient* $\ln(k) - \ln(k-1) \geqslant \dfrac{1}{k}$.

   (c) Soit $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $b \geqslant a \geqslant 2$. Montrer

$$\ln(b+1) - \ln(a) \leqslant \sum_{k=a}^{b} \frac{1}{k} \leqslant \ln(b) - \ln(a-1).$$

   Pour tout $k \in [\![a, b]\!]$, *on a* $k \geqslant 2$ *donc on obtient :*

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1).$$

   En sommant ces différentes inégalités, on obtient (par télescopage) :

$$\ln(a+1) - \ln(b) = \sum_{k=a}^{b} [\ln(k+1) - \ln(k)] = \sum_{k=a}^{b} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=a}^{b} [\ln(k) - \ln(k-1)] = \ln(b) - \ln(a-1).$$

3. Soit $n \geqslant 2$.

   (a) En transformant S_n en une somme de la forme $\displaystyle\sum_{i=?}^{?}\sum_{k=?}^{?}\frac{1}{k}$, montrer $S_n \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{n}{i}\right)$.

   On a

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{i+j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i+1}^{i+n}\frac{1}{k} && \begin{bmatrix} k = i+j \\ j = k-i \end{bmatrix} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}[\ln(i+n)-\ln(i)] && \textit{(ques. préc.)} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{i+n}{i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{n}{i}\right).
\end{aligned}$$

   (b) En déduire $S_n \leqslant n\left(\ln(n)+1\right)$.

   On a

$$\begin{aligned}
S_n &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{n}{i}\right) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{n}{i} \\
&\leqslant n\left[1+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\right] \\
&\leqslant n\,[1+(\ln(n)-\ln(1))] && \textit{(ques. 2c)} \\
&\leqslant n\left(\ln(n)+1\right).
\end{aligned}$$

   Remarque. *Cet argument était peut-être exagérément neuneu. En effet, on obtient* $S_n \leqslant n\,\ln(n+1)$*, ce qui était très légèrement meilleur que l'inégalité demandée, par simple majoration grossière.*

4. En étudiant la suite $(S_{n+1}-S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \leqslant \ln(4)\,n$.

   ► *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. On a*

$$\begin{aligned}
S_{n+1}-S_n &= \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{i+j} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{i+j} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{i+j} - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{i+j}\right] + \sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+j} && \textit{(bébé Chasles)} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i+n+1} + \sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+j} \\
&= 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1+k} + \frac{1}{2n+2} \\
&\leqslant 2\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k} = 2\sum_{\ell=n+2}^{2n+2}\frac{1}{\ell} && \begin{bmatrix} \ell = n+1+k \\ k = \ell-(n+1) \end{bmatrix} \\
&\leqslant 2\big(\ln(2n+2)-\ln(n+1)\big) && \textit{(ques. 2c)} \\
&\leqslant 2\ln\left(\frac{2n+2}{n+1}\right) = 2\ln(2) = \ln(4).
\end{aligned}$$

Notons que ce calcul reste correct pour $n = 0$ si l'on décide que $S_0 = 0$.

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par télescopage,*

$$S_n = S_n - S_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(S_{k+1} - S_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \ln(4) = n \ln(4).$$

Problème. Quelques propriétés de la fonction argth.

Partie I. Généralités.

1. Montrer que la fonction tangente hyperbolique $\mathrm{th} = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$ induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

- *La fonction* th *est* ***continue*** *sur l'****intervalle*** $\mathbb{R}$.
- *Sur cet intervalle, elle est* ***strictement croissante*** *(par exemple parce qu'elle est dérivable et que sa dérivée $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2}$ est > 0).*
- *On a* $\mathrm{th}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1.$

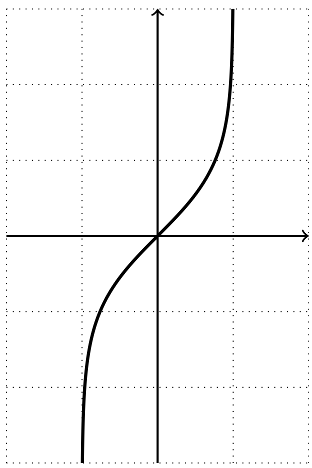
  Par imparité ou en répétant le calcul, $\mathrm{th}(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -1.$

D'après le théorème de la bijection monotone (dans sa version « intervalles ouverts »), la fonction th *induit donc une bijection $\mathbb{R} \to]-1, 1[$.*

Dans tout le sujet, on notera argth : $]-1, 1[\to \mathbb{R}$ la réciproque de cette bijection.

2. Dessiner le graphe de argth.

Il s'agit du symétrique, par rapport à la droite d'équation $y = x$, du graphe de th.



3. Montrer que la fonction argth est lisse, et montrer que $\forall y \in]-1, 1[, \mathrm{argth}'(y) = \dfrac{1}{1 - y^2}$.

La fonction induite th : $\mathbb{R} \to]-1, 1[$ *est bijective et lisse, par opérations.*

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) > 0$.

Le critère de dérivabilité des fonctions réciproques (dans sa version lisse), entraîne donc que argth *est lisse et que, pour tout $y \in]-1, 1[$,*

$$\mathrm{argth}'(y) = \frac{1}{\mathrm{th}'(\mathrm{argth}(y))} = \frac{1}{1 - \mathrm{th}^2(\mathrm{argth}(y))} = \frac{1}{1 - y^2}.$$

4. Soit $y \in \mathbb{R}$.

   (a) Résoudre (sans utiliser argth) l'équation $\mathrm{th}(x) = y$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

   ► *La fonction* th *est à valeurs dans* $]-1,1[$. *Si* $y \notin]-1,1[$*, l'équation n'a donc pas de solution.*

   ► *Supposons* $y \in]-1,1[$. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *On a la chaîne d'équivalences*

$$\begin{aligned}
\mathrm{th}(x) = y &\Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \\
&\Leftrightarrow e^x - e^{-x} = y\, e^x + y\, e^{-x} \\
&\Leftrightarrow (1-y)\, e^x = (1+y)\, e^{-x} \\
&\Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} && \textit{(car } e^x, 1-y \neq 0\textit{)} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) && \textit{(car } \frac{1+y}{1-y} > 0\textit{).}
\end{aligned}$$

   Dans ce cas, l'équation a donc une unique solution, à savoir $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$.

   (b) En déduire une expression de argth mettant en jeu la fonction logarithme.

   Soit $y \in]-1,1[$. *La question précédente montre que* $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$ *est un antécédent de* y *par* th. *Comme* $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to]-1,1[$ *est bijective, cet antécédent est nécessairement* $\mathrm{argth}(y)$.

   On a donc montré $\forall y \in]-1,1[, \mathrm{argth}(y) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$.

5. **Formule d'addition.** Soit $a, b \in \mathbb{R}$.

   (a) En vous inspirant des formules correspondantes pour cos et sin, trouver des expressions simples pour $\mathrm{ch}(a+b)$ et $\mathrm{sh}(a+b)$.

   En revenant aux expressions avec les exponentielles, on montre sans difficulté (en développant puis simplifiant les membres de droite, par exemple) que $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)$ *et* $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b)$.

   (b) En déduire $\mathrm{th}(a+b) = \dfrac{\mathrm{th}(a) + \mathrm{th}(b)}{1 + \mathrm{th}(a)\,\mathrm{th}(b)}$.

   On recopie en l'adaptant la démonstration de la formule d'addition de la tangente. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{th}(a+b) &= \frac{\mathrm{sh}(a+b)}{\mathrm{ch}(a+b)} \\
&= \frac{\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{sh}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{ch}(b)}{\mathrm{ch}(a)\,\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\,\mathrm{sh}(b)} \\
&= \frac{\dfrac{\mathrm{sh}(b)}{\mathrm{ch}(b)} + \dfrac{\mathrm{sh}(a)}{\mathrm{ch}(a)}}{1 + \dfrac{\mathrm{sh}(a)}{\mathrm{ch}(a)}\dfrac{\mathrm{sh}(b)}{\mathrm{ch}(b)}} && \textit{(en divisant en haut et en bas par } \mathrm{ch}(a)\ \mathrm{ch}(b) > 0\textit{)} \\
&= \frac{\mathrm{th}(a) + \mathrm{th}(b)}{1 + \mathrm{th}(a)\,\mathrm{th}(b)}.
\end{aligned}$$

6. **Addition relativiste** [*] **des vitesses**. Pour tous $v_1, v_2 \in]-1,1[$, on définit $v_1 \oplus v_2 = \dfrac{v_1+v_2}{1+v_1v_2}$.

   (a) Soit $v_1, v_2 \in]-1,1[$. Exprimer $v_1 \oplus v_2$ en fonction de th et argth.

   Comme $v_1, v_2 \in]-1,1[$*, on peut écrire* $v_1 = \mathrm{th}(\mathrm{argth}(v_1))$ *et* idem *pour* v_2*. On a alors*

$$\begin{aligned} v_1 \oplus v_2 &= \frac{\mathrm{th}(\mathrm{argth}(v_1)) + \mathrm{th}(\mathrm{argth}(v_2))}{1 + \mathrm{th}(\mathrm{argth}(v_1))\,\mathrm{th}(\mathrm{argth}(v_2))} \\ &= \mathrm{th}\left(\mathrm{argth}(v_1) + \mathrm{argth}(v_2)\right), \end{aligned}$$

   d'après la question précédente.

   (b) En déduire $\forall v_1, v_2, v_3 \in]-1,1[\,, v_1 \oplus (v_2 \oplus v_3) = (v_1 \oplus v_2) \oplus v_3$.

   Soit $v_1, v_2, v_3 \in]-1,1[$*. En marquant d'une étoile les utilisations de la question précédente, on a*

$$\begin{aligned} v_1 \oplus (v_2 \oplus v_3) &\overset{*}{=} \mathrm{th}\big(\mathrm{argth}(v_1) + \mathrm{argth}(v_2 \oplus v_3)\big) \\ &\overset{*}{=} \mathrm{th}\big(\mathrm{argth}(v_1) + \mathrm{argth}(\mathrm{th}(\mathrm{argth}(v_2) + \mathrm{argth}(v_3)))\big) \\ &\overset{*}{=} \mathrm{th}\big(\mathrm{argth}(v_1) + (\mathrm{argth}(v_2) + \mathrm{argth}(v_3))\big). \end{aligned}$$

   On montre exactement de la même façon que

$$(v_1 \oplus v_2) \oplus v_3 = \mathrm{th}\big((\mathrm{argth}(v_1) + \mathrm{argth}(v_2)) + \mathrm{argth}(v_3)\big).$$

   Comme l'addition est associative, ces deux expressions sont bien égales.

   Remarque. *La question précédente montre en fait que* $\oplus$ *est une version déguisée de l'addition. Elle hérite donc de toutes les propriétés de cette opération. En algèbre, on dit que* $\oplus$ *est obtenue à partir de* $+$ *par* ***transfert de structure.***

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant sa dérivée, donner un DL_{2n+1} de argth.

   On a

$$\mathrm{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n}).$$

   Comme $\mathrm{argth}(0) = 0$ *(parce que* $0 = \mathrm{th}(0)$*), on peut primitiver ce DL et obtenir :*

$$\mathrm{argth}'(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

---

*. *Stricto sensu*, il s'agit de l'addition relativiste des vitesses dans des unités dans lesquelles $c = 1$.

Partie II. Une jolie somme (Melham-Shannon, 1995).

Dans cette partie, on définit la suite des *nombres de Fibonacci* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

On démontre facilement que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante : on pourra utiliser librement ce résultat dans la suite.

8. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* $P(n)$ *l'assertion «* $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ *». Montrons* $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ *par récurrence.*

   Initialisation. *On a* $F_2 = F_0+F_1 = 1$, *donc* $F_0F_2-F_1^2 = 0\times 1-1^2 = -1 = (-1)^1$, *ce qui montre* $P(1)$.
   Hérédité. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $P(n)$. *On a alors*

$$\begin{aligned} F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 &= (F_{n+1} - F_{n-1})(F_n + F_{n+1}) - F_{n+1}^2 \\ &= F_nF_{n+1} - F_{n-1}F_n - F_{n-1}F_{n+1} \\ &= F_nF_{n+1} - F_{n-1}F_n - \big((-1)^n + F_n^2\big) \qquad \textit{(d'après } P(n)\textit{)} \\ &= F_n\underbrace{\big(F_{n+1} - F_{n-1} - F_n\big)}_{=0} - (-1)^n \\ &= (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

   ce qui montre $P(n+1)$ *et clôt la récurrence.*

   Remarque. *Cette identité sur les nombres de Fibonacci est connue sous le nom d'**identité de Cassini**. On pourra la démontrer très rapidement à l'aide du calcul matriciel : pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on vérifie*

$$\begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n,$$

   et on conclut en utilisant la multiplicativité du déterminant : $\forall A, B \in M_2(\mathbb{R}), \text{dét}(AB) = \text{dét}(A)\ \text{dét}(B)$.

9. En déduire que $\forall n \geqslant 2, \operatorname{argth}\left(\frac{1}{F_{2n-1}}\right) - \operatorname{argth}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) = \operatorname{argth}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right)$.

   Remarquons déjà que pour tout $m \geqslant 3$, *on a* $F_m \geqslant F_3 = 2$, *si bien que* $\frac{1}{F_m} \in]0,1[$ *et que* $\operatorname{argth}\left(\frac{1}{F_m}\right)$ *est bien défini.*

   Soit $n \geqslant 2$. *Calculons la tangente hyperbolique du membre de gauche à l'aide de la formule d'addition (et de l'imparité d'*argth*, conséquence de celle de* th*) :*

$$\begin{aligned} \operatorname{th}\left(\operatorname{argth}\left(\frac{1}{F_{2n-1}}\right) - \operatorname{argth}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right)\right) &= \frac{\operatorname{th}\left(\operatorname{argth}\left(\frac{1}{F_{2n-1}}\right)\right) - \operatorname{th}\left(\operatorname{argth}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right)\right)}{1 - \operatorname{th}\left(\operatorname{argth}\left(\frac{1}{F_{2n-1}}\right)\right)\operatorname{th}\left(\operatorname{argth}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right)\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{F_{2n-1}} - \frac{1}{F_{2n+1}}}{1 - \frac{1}{F_{2n-1}}\frac{1}{F_{2n+1}}} \\ &= \frac{F_{2n+1} - F_{2n-1}}{F_{2n-1}F_{2n+1} - 1} \qquad \textit{(en multipliant par } F_{2n-1}F_{2n+1} > 0\textit{)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{F_{2n}}{F_{2n}^2} \quad \textit{(question précédente)}\\
&= \frac{1}{F_{2n}}.
\end{aligned}
$$

En appliquant la fonction argth *de part et d'autre, on obtient l'égalité demandée.*

10. Soit $N \geqslant 2$. Utiliser ce qui précède pour donner une expression simple de $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} \operatorname{argth}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right)$.

    On utilise la question précédente et on télescope :

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} \operatorname{argth}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) &= \sum_{n=2}^{N} \left[\operatorname{argth}\left(\frac{1}{F_{2n-1}}\right) - \operatorname{argth}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right)\right]\\
&= \operatorname{argth}\left(\frac{1}{F_3}\right) - \operatorname{argth}\left(\frac{1}{F_{2N+1}}\right).
\end{aligned}
$$

11. Montrer $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=2}^{N} \operatorname{argth}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) = \frac{\ln(3)}{2}$.

    - *Déjà, la formule de la question 4 donne*

$$
\operatorname{argth}\left(\frac{1}{F_3}\right) = \operatorname{argth}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+1/2}{1-1/2}\right) = \frac{\ln(3)}{2}.
$$

    - *Ensuite, nous allons montrer* $F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. *On en déduira* $F_{2N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$, *ce qui donnera, par composition des limites*

$$
\frac{1}{F_{2N+1}} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 \qquad \textit{donc} \qquad \operatorname{argth}\left(\frac{1}{F_{2N+1}}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \operatorname{argth}(0) = 0,
$$

      où l'on a utilisé la continuité de argth *pour affirmer que* $\operatorname{argth}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \operatorname{argth}(0)$.

      Le plus simple est peut-être de raisonner de manière indirecte : comme $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *croît, le théorème de la limite monotone entraîne que* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge ou diverge vers* $+\infty$.

      Si (par l'absurde), on pouvait trouver $\ell \in \mathbb{R}$ *tel que* $F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, *on obtiendrait* $\ell = \ell + \ell$ *en passant à la limite dans l'égalité* $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, *ce qui donne* $\ell = 0$. *Cela est absurde car la limite de cette suite croissante doit notamment être* $\geqslant F_1 = 1$.

      Ainsi, la seule possibilité est $F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Remarque. *La version posée contenait une erreur, avec* $\ln(3)$ *remplacé par* $\ln(2)$. Mea maxima culpa !

Partie III. Fonction χ de Legendre.

On admet dans cette partie pouvoir trouver une fonction $\chi \in C^\infty(]-1,1[)$ telle que

$$\chi(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]-1,0[\cup]0,1[, \chi'(x) = \frac{\operatorname{argth}(x)}{x}.$$

12. Montrer que χ est strictement croissante.

    Nous allons montrer que la dérivée de χ (qui existe et est continue, puisque χ est lisse) est > 0 sur l'intervalle $]-1,1[$, ce qui conclura.

    - *Comme $\forall x \neq 0, \chi'(x) = \dfrac{\operatorname{argth}(x)}{x} > 0$, il suffit de s'intéresser à $\chi'(0)$.*
    - *Le DL de la question 7 montre que $\operatorname{argth}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, si bien que $\chi'(x) = \dfrac{\operatorname{argth}(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.*

      Comme χ' est continue, on a aussi $\chi'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \chi'(0)$.

      Par unicité de la limite, $\chi'(0) = 1$, ce qui conclut.

13. Soit $x \in]0,1[$. Justifier que l'expression $\operatorname{argth}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ est bien définie, et la calculer.

    On peut réécrire $\dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{2}{1+x} - 1$ et obtenir $1+x \in]1,2[$, d'où $\dfrac{2}{1+x} \in]1,2[$ et enfin $\dfrac{1-x}{1+x} \in]0,1[$.
    A fortiori, *l'expression* $\operatorname{argth}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ *est bien définie.*

    En utilisant la question 4, on obtient

$$\operatorname{argth}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\dfrac{1-x}{1+x}}{1-\dfrac{1-x}{1+x}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(1+x)+(1-x)}{(1+x)-(1-x)}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{2x}\right) = -\frac{1}{2}\ln(x).$$

14. Montrer que la fonction $g : \begin{cases}]0,1[\to & \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \chi\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \end{cases}$ est lisse, et calculer sa dérivée.

    La fonction g est lisse en tant que composée de fonctions lisses. Soit $x \in]0,1[$. On a, notamment grâce à la question précédente :

$$g'(x) = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}\frac{\operatorname{argth}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)}{\dfrac{1-x}{1+x}} = \frac{-2}{(1+x)^2}\frac{-\frac{1}{2}\ln(x)}{\dfrac{1-x}{1+x}} = \frac{\ln(x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{\ln(x)}{1-x^2}.$$

15. Montrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in]0,1[, \chi\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \chi(x) = C + \ln(x)\ \operatorname{argth}(x).$$

Soit $u : \begin{cases}]0,1[\to & \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \chi\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) + \chi(x) - \ln(x)\ \operatorname{argth}(x). \end{cases}$

Cette fonction est lisse par opérations. Soit $x \in]0,1[$. *On a*

$$u'(x) = \frac{\ln(x)}{1-x^2} + \frac{\operatorname{argth}(x)}{x} - \frac{\operatorname{argth}(x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x^2} = 0.$$

La fonction u*, dérivable sur l'intervalle* $]0,1[$ *et de dérivée nulle, est donc constante. On peut donc trouver* $C \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall x \in]0,1[, \chi\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \chi(x) = C + \ln(x)\ \operatorname{argth}(x)$.

En appliquant ce résultat en n'importe quel point $x_0 \in]0,1[$ *(par exemple* $x_0 = 1/2$*), on obtient l'égalité* $C = \chi\left(\frac{1-x_0}{1+x_0}\right) + \chi(x_0) - \ln(x_0)\ \operatorname{argth}(x_0)$. *Or,*

- *la stricte croissance de* χ *montre que* $\chi\left(\frac{1-x_0}{1+x_0}\right) > \chi(0) = 0$ *et, de même* $\chi(x_0) > 0$ *;*
- *on a* $\ln(x_0) < 0$ *et* $\operatorname{argth}(x_0) > 0$*, donc* $-\ln(x_0)\ \operatorname{argth}(x_0) > 0$.

Cela montre $C > 0$.

16. Montrer que la fonction χ admet une limite finie en 1.

On remarque que $\varphi : x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ *est une involution de l'intervalle ouvert* $]0,1[$ *qui vérifie* $\varphi(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$.

Soit $x \in]0,1[$. *En appliquant la relation de la question précédente à* $\varphi(x)$*, on obtient*

$$\chi(x) = C + \ln\big(\varphi(x)\big)\operatorname{argth}\big(\varphi(x)\big) - \chi\big(\varphi(x)\big).$$

Or,

- *Le développement limité de la question 7 montre que* $\operatorname{argth}(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$.

  On en déduit que $\ln(u)\ \operatorname{argth}(u) \underset{u\to 0}{\sim} \ln(u)\, u$*, qui tend vers* 0 *quand* u *tend vers* 0*, par croissance comparée.*

  Ainsi, $\ln(u)\ \operatorname{argth}(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$*, donc* $\ln\big(\varphi(x)\big)\operatorname{argth}\big(\varphi(x)\big) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$ *par composition des limites.*
- *Par continuité en* 0*,* $\chi(u) \xrightarrow[u\to 0]{} \chi(0) = 0$*, donc* $\chi\big(\varphi(x)\big) \xrightarrow[x\to 1]{} 0$.

Par opérations, cela montre $\chi(x) \xrightarrow[x\to 1]{} C$.

Remarque. *Avec les outils du cours de deuxième année, on peut montrer que* $C = \lim_1 \chi = \frac{\pi^2}{8}$.

17. Déterminer la suite $\left(\chi^{(n)}(0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des dérivées en 0 de la fonction χ.

Soit $N \in \mathbb{N}$.

- *Comme la fonction* χ *est lisse, le théorème de Taylor-Young donne un* $\mathrm{DL}_{2N+1}(0)$ *:*

$$\chi(x) = \sum_{n=0}^{2N+1} \frac{\chi^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^{2N+1}).$$

- *Par ailleurs, le DL obtenu à la question 7 donne*

$$\chi'(x) = \frac{\operatorname{argth}(x)}{x} = \frac{1}{x}\left[\sum_{k=0}^{N} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2N+1})\right] = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^{2k}}{2k+1} + o(x^{2N}).$$

  Comme $\chi(0) = 0$*, on en déduit, par primitivation des DL :*

$$\chi(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)^2} + o(x^{2N+1}).$$

Par unicité du DL, on en déduit

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [\![0, 2N+1]\!], \frac{\chi^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases} 0 & \textit{si } n \textit{ est pair} \\ \dfrac{1}{n^2} & \textit{si } n \textit{ est impair,} \end{cases}$$

ce qui est une manière compliquée de dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \chi^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \textit{si } n \textit{ est pair} \\ \dfrac{n!}{n^2} & \textit{si } n \textit{ est impair,} \end{cases}$$

Partie IV. Inégalité de Zhu-Malešević (2019).

Soit $h : \begin{cases} \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[& \to \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto \sin(\theta) + \dfrac{\theta}{\cos(\theta)} - 2\ln\left(\dfrac{1+\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right). \end{cases}$

18. En l'étudiant, montrer que la fonction h est positive.

Les dénominateurs ne s'annulant jamais et toutes les fonctions mises en jeu étant lisses, la fonction h est lisse, par opérations. Soit $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On a

$$\begin{aligned} h'(\theta) &= \cos(\theta) + \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\theta \sin(\theta)}{\cos(\theta)^2} - 2\frac{\cos(\theta)^2 + (1+\sin(\theta))\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2} \frac{\cos(\theta)}{1+\sin(\theta)} \\ &= \cos(\theta) + \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\theta \tan(\theta)}{\cos(\theta)} - 2\frac{1+\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \frac{1}{1+\sin(\theta)} \\ &= \frac{1}{\cos(\theta)}\left[\cos(\theta)^2 + 1 + \theta \tan(\theta) - 2\right] \\ &= \frac{1}{\cos(\theta)}\left[\cos(\theta)^2 + \theta \tan(\theta) - 1\right] \\ &= \frac{1}{\cos(\theta)}\left[\theta \tan(\theta) - \sin(\theta)^2\right] \\ &= \tan(\theta)\left[\frac{\theta}{\cos\theta} - \sin(\theta)\right]. \end{aligned}$$

Or, pour tout $\theta \in \mathbb{R}_+$, on a $\sin(\theta) \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\theta}{\cos\theta}$, donc ce calcul montre que $h'(\theta) \geqslant 0$.

On en déduit que h est croissante. Comme $h(0) = 0$, la fonction h est positive.

19. Montrer que $\forall \theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[, \ln^2\left(\dfrac{1+\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right) \leqslant \theta \tan(\theta)$.

Posons $u : \begin{cases} \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[& \to \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto \theta \tan(\theta) - \ln^2\left(\dfrac{1+\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right). \end{cases}$

Cette fonction est lisse par opérations. Soit $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On a

$$\begin{aligned} u'(\theta) &= \tan(\theta) + \frac{\theta}{\cos^2(\theta)} - 2\frac{1+\sin(\theta)}{\cos(\theta)^2}\frac{\cos(\theta)}{1+\sin(\theta)} \ln\left(\frac{1+\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right) \\ &= \tan(\theta) + \frac{\theta}{\cos^2(\theta)} - \frac{2}{\cos(\theta)} \ln\left(\frac{1+\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right) = \frac{h(\theta)}{\cos(\theta)}. \end{aligned}$$

La question précédente montre donc que u' *est positive, et donc que* u *est croissante.*

Comme $u(0) = 0$*, on en déduit que* u *est positive, ce qui conclut.*

20. En déduire l'inégalité de Zhu-Malešević : $\forall x \in \,]-1,1[\,, \operatorname{argth}(x)^2 \leqslant \dfrac{x \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

Les deux fonctions $x \mapsto \operatorname{argth}(x)^2$ *et* $x \mapsto \dfrac{x \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ *étant paires, il suffit de montrer l'inégalité sur l'intervalle* $[0,1[$*. Soit donc* $x \in [0,1[$*.*

On applique la question précédente à $\theta = \arcsin(x)$ *(qui vérifie donc* $\sin(\theta) = x$*). Notons que, comme* $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$*, on a* $\cos(x) \geqslant 0$ *et donc* $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)} = \sqrt{1-\theta^2}$*. On obtient ainsi*

$$\ln^2\left(\frac{1+\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right) \leqslant \theta \, \tan(\theta) \qquad \textit{donc} \qquad \ln^2\left(\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \leqslant \arcsin(x)\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Or,

$$\ln\left(\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{1+x}\,\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \operatorname{argth}(x),$$

(ce que l'on aurait aussi pu montrer par une étude de fonctions) donc l'inégalité obtenue précédemment s'écrit $\operatorname{argth}(x)^2 \leqslant x\,\dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$*, ce qui conclut.*