Troisième composition de mathématiques

Durée : *4 heures.*

Toute sortie est interdite pendant les dix dernières minutes.

Les documents, calculatrices, etc. sont ***interdits****, à l'exception du formulaire de développements limités.*

Consignes générales de présentation

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci d'encadrer ou de souligner vos résultats.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.*
- *Les parties trop difficiles à lire de votre copie ne seront pas lues.*

Exercice 1

1. Calculer le $DL_5(0)$ de $x \mapsto e^{x^2} \sin(x)$.

2. Calculer le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$.

Exercice 2

Dans cet exercice, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{1}{i+j}$.

1. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{n}{2} \leqslant S_n \leqslant \dfrac{n^2}{2}$.

Le but de cet exercice est d'améliorer significativement cette majoration, sans calculer exactement S_n.

2. (a) **Question de cours.** Montrer $\forall x \in]-1, +\infty[\,, \ln(1+x) \leqslant x$.
   (b) En utilisant la question précédente, montrer
      - $\forall k \in \mathbb{N}^*, \dfrac{1}{k} \geqslant \ln(k+1) - \ln(k)$;
      - $\forall k \geqslant 2, \dfrac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$.

   (c) Soit $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $b \geqslant a \geqslant 2$. Montrer
$$\ln(b+1) - \ln(a) \leqslant \sum_{k=a}^{b} \frac{1}{k} \leqslant \ln(b) - \ln(a-1).$$

3. Soit $n \geqslant 2$.
   (a) En transformant S_n en une somme de la forme $\displaystyle\sum_{i=?}^{?} \sum_{k=?}^{?} \frac{1}{k}$, montrer $S_n \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{n}{i}\right)$.
   (b) En déduire $S_n \leqslant n\left(\ln(n) + 1\right)$.
4. En étudiant la suite $(S_{n+1} - S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \leqslant \ln(4)\, n$.

Problème. Quelques propriétés de la fonction argth.

Ce problème est consacré à l'étude de la fonction argument tangente hyperbolique, *notée* argth. *Celle-ci est définie juste après la première question.*

Certains résultats de la première partie sont utiles dans tout le problème. Les parties ultérieures sont indépendantes les unes des autres.

Partie I. Généralités.

1. Montrer que la fonction tangente hyperbolique $\mathrm{th} = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$ induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

Dans tout le sujet, on notera $\mathrm{argth} :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ la réciproque de cette bijection.

2. Dessiner le graphe de argth.
3. Montrer que la fonction argth est lisse, et montrer que $\forall y \in]-1, 1[\,, \mathrm{argth}'(y) = \dfrac{1}{1-y^2}$.
4. Soit $y \in \mathbb{R}$.
   (a) Résoudre (sans utiliser argth) l'équation $\mathrm{th}(x) = y$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire une expression de argth mettant en jeu la fonction logarithme.
5. **Formule d'addition.** Soit $a, b \in \mathbb{R}$.
   (a) En vous inspirant des formules correspondantes pour cos et sin, trouver des expressions simples pour $\mathrm{ch}(a+b)$ et $\mathrm{sh}(a+b)$.
   (b) En déduire $\mathrm{th}(a+b) = \dfrac{\mathrm{th}(a) + \mathrm{th}(b)}{1 + \mathrm{th}(a)\,\mathrm{th}(b)}$.
6. **Addition relativiste*** **des vitesses**. Pour tous $v_1, v_2 \in]-1, 1[$, on définit $v_1 \oplus v_2 = \dfrac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}$.
   (a) Soit $v_1, v_2 \in]-1, 1[$. Exprimer $v_1 \oplus v_2$ en fonction de th et argth.
   (b) En déduire $\forall v_1, v_2, v_3 \in]-1, 1[\,, v_1 \oplus (v_2 \oplus v_3) = (v_1 \oplus v_2) \oplus v_3$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant sa dérivée, donner un DL_{2n+1} de argth.

Partie II. Une jolie somme (Melham-Shannon, 1995).

Dans cette partie, on définit la suite des *nombres de Fibonacci* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

On démontre facilement que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante : on pourra utiliser librement ce résultat dans la suite.

8. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.
9. En déduire que $\forall n \geqslant 2$, $\mathrm{argth}\left(\dfrac{1}{F_{2n-1}}\right) - \mathrm{argth}\left(\dfrac{1}{F_{2n+1}}\right) = \mathrm{argth}\left(\dfrac{1}{F_{2n}}\right)$.
10. Soit $N \geqslant 2$. Utiliser ce qui précède pour donner une expression simple de $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} \mathrm{argth}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right)$.
11. Montrer $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=2}^{N} \mathrm{argth}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) = \frac{\ln(3)}{2}$.

    (On pourra utiliser librement les résultats du lycée sur les limites de suites.)

*. *Stricto sensu*, il s'agit de l'addition relativiste des vitesses dans des unités dans lesquelles $c = 1$.

Partie III. Fonction χ de Legendre.

On admet dans cette partie pouvoir trouver une fonction $\chi \in C^{\infty}(]-1,1[)$ telle que

$$\chi(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]-1,0[\cup]0,1[\,, \chi'(x) = \frac{\operatorname{argth}(x)}{x}.$$

12. Montrer que χ est strictement croissante.
13. Soit $x \in]0,1[$. Justifier que l'expression $\operatorname{argth}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ est bien définie, et la calculer.
14. Montrer que la fonction $g : \begin{cases}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \chi\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \end{cases}$ est lisse, et calculer sa dérivée.
15. Montrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in]0,1[\,, \chi\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \chi(x) = C + \ln(x)\ \operatorname{argth}(x).$$

16. Montrer que la fonction χ admet une limite finie en 1.
17. Déterminer la suite $\left(\chi^{(n)}(0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ des dérivées en 0 de la fonction χ.

Partie IV. Inégalité de Zhu-Malešević (2019).

Soit $h : \begin{cases} \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ \theta & \mapsto & \sin(\theta) + \dfrac{\theta}{\cos(\theta)} - 2\ln\left(\dfrac{1+\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right) \end{cases}.$

18. En l'étudiant, montrer que la fonction h est positive.
19. Montrer que $\forall \theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[\,, \ln^2\left(\dfrac{1+\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right) \leqslant \theta\ \tan(\theta)$.
20. En déduire l'inégalité de Zhu-Malešević : $\forall x \in]-1,1[\,, \operatorname{argth}(x)^2 \leqslant \dfrac{x\ \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.