
Troisième composition de mathématiques [corrigé]

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \operatorname{th}^2 \left(\frac{x}{2^k} \right) \right)$.

1. Soit $u, v \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer $\operatorname{sh}(u+v) = \operatorname{ch}(u)\operatorname{sh}(v) + \operatorname{sh}(u)\operatorname{ch}(v)$ et $\operatorname{ch}(u+v) = \operatorname{ch}(u)\operatorname{ch}(v) + \operatorname{sh}(u)\operatorname{sh}(v)$.

On a

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(u)\operatorname{sh}(v) + \operatorname{sh}(u)\operatorname{ch}(v) &= \frac{e^u + e^{-u}}{2} \frac{e^v - e^{-v}}{2} + \frac{e^u - e^{-u}}{2} \frac{e^v + e^{-v}}{2} \\ &= \frac{1}{4} \left((e^{u+v} - e^{u-v} + e^{-u+v} - e^{-u-v}) \right. \\ &\quad \left. + (e^{u+v} + e^{u-v} - e^{-u+v} - e^{-u-v}) \right) \\ &= \frac{e^{u+v} - e^{-u-v}}{2} = \operatorname{sh}(u+v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \operatorname{ch}(u)\operatorname{ch}(v) + \operatorname{sh}(u)\operatorname{sh}(v) &= \frac{e^u + e^{-u}}{2} \frac{e^v + e^{-v}}{2} + \frac{e^u - e^{-u}}{2} \frac{e^v - e^{-v}}{2} \\ &= \frac{1}{4} \left((e^{u+v} + e^{u-v} + e^{-u+v} + e^{-u-v}) \right. \\ &\quad \left. + (e^{u+v} - e^{u-v} - e^{-u+v} + e^{-u-v}) \right) \\ &= \frac{e^{u+v} + e^{-u-v}}{2} = \operatorname{ch}(u+v). \end{aligned}$$

(b) Exprimer $\operatorname{th}(u+v)$ en fonction de $\operatorname{th}(u)$ et $\operatorname{th}(v)$.

On procède comme pour la fonction tangente : on a

$$\begin{aligned} \operatorname{th}(u+v) &= \frac{\operatorname{sh}(u+v)}{\operatorname{ch}(u+v)} \\ &= \frac{\operatorname{ch}(u)\operatorname{sh}(v) + \operatorname{sh}(u)\operatorname{ch}(v)}{\operatorname{ch}(u)\operatorname{ch}(v) + \operatorname{sh}(u)\operatorname{sh}(v)} \\ &= \frac{\frac{\operatorname{sh}(v)}{\operatorname{ch}(v)} + \frac{\operatorname{sh}(u)}{\operatorname{ch}(u)}}{1 + \frac{\operatorname{sh}(u)\operatorname{sh}(v)}{\operatorname{ch}(u)\operatorname{ch}(v)}}} \\ &= \frac{\operatorname{th}(u) + \operatorname{th}(v)}{1 + \operatorname{th}(u)\operatorname{th}(v)}. \end{aligned}$$

(c) En déduire $\forall t \in \mathbb{R}, \operatorname{th}(2t) = \frac{2 \operatorname{th}(t)}{1 + \operatorname{th}^2(t)}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a directement en appliquant la question précédente

$$\operatorname{th}(2t) = \frac{\operatorname{th}(t) + \operatorname{th}(t)}{1 + \operatorname{th}(t) \operatorname{th}(t)} = \frac{2 \operatorname{th}(t)}{1 + \operatorname{th}^2(t)}.$$

2. (a) Effectuer un $DL_5(0)$ de th .

C'est quasiment le même calcul que le $DL_5(0)$ de \tan effectué en cours. On calcule d'abord un $DL_4(0)$ de $\frac{1}{\operatorname{ch}}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\operatorname{ch} x} &= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} \\ &= 1 - \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) + \left(\frac{x^2}{2} + o(x^2) \right)^2 + o(x^4) \end{aligned}$$

$$\text{car } \begin{cases} \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2) \\ \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \operatorname{th}(x) &= \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4) \right) \\ &= x - \frac{x^3}{2} + \frac{5}{24}x^5 + o(x^5) \\ &\quad + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} \\ &\quad + \frac{x^5}{120} \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

(b) En déduire un équivalent de th au voisinage de 0, puis la valeur de $\ell = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th}(t)}{t}$.

On en déduit immédiatement $\operatorname{th}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, c'est-à-dire $\frac{\operatorname{th}(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 1$.

Notons que le $DL_1(0)$ $\operatorname{th}(x) = \operatorname{th}(0) + \operatorname{th}'(0)x + o(x) = x + o(x)$ aurait suffi, mais il eût été dommage de se priver d'un calcul aussi réjouissant.

3. (a) Montrer $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \ln \left(1 + \operatorname{th}^2 \left(\frac{x}{2^k} \right) \right) = \ln(2) + \ln \left(\operatorname{th} \left(\frac{x}{2^k} \right) \right) - \ln \left(\operatorname{th} \left(\frac{x}{2^{k-1}} \right) \right)$.

Commençons par remarquer que, pour tout $t > 0$, on a $\operatorname{th}(t) > 0$ et que $\ln(\operatorname{th}(t))$ est donc bien défini. La formule de l'énoncé a donc bien un sens.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$. On applique la question 1c à $\frac{x}{2^k}$ et on obtient

$$\underbrace{\operatorname{th} \left(2 \frac{x}{2^k} \right)}_{>0} = \frac{2 \operatorname{th} \left(\frac{x}{2^k} \right)}{1 + \operatorname{th}^2 \left(\frac{x}{2^k} \right)}$$

$$\text{donc } \underbrace{1 + \text{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)}_{>0} = \frac{2 \text{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)}{\text{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}$$

$$\text{donc } \ln\left(1 + \text{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) - \ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right).$$

(b) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, S_n(x) = \ln\left(2^n \text{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) - \ln(\text{th}(x))$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. En sommant les inégalités de la question précédente pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on obtient

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \text{th}^2\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = \sum_{k=1}^n \left[\ln(2) + \ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) - \ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right) \right] \\ &= n \ln(2) + \sum_{k=1}^n \left[\ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) - \ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)\right) \right] \\ &= \ln(2^n) + \ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) - \ln\left(\text{th}\left(\frac{x}{2^0}\right)\right) \quad (\text{par télescopage}) \\ &= \ln\left(2^n \text{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) - \ln(\text{th}(x)). \end{aligned}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$.

La suite $\left(\frac{x}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs non nulles et converge vers 0, donc, par composition des limites :

$$\frac{\text{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{donc} \quad 2^n \text{th}\left(\frac{x}{2^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x.$$

Par continuité du logarithme en x , on en déduit $\ln\left(2^n \text{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln x$.

Par opérations, on en déduit $S_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(x) - \ln(\text{th}(x))$.

Exercice 2

1. Écrire sans démonstration $D_{\tan} = \cos^{-1}[\mathbb{R}^*]$ comme une réunion (infinie) d'intervalles.

$$\text{On a } D_{\tan} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[.$$

2. On définit la fonction sécante $\sec : \begin{cases} D_{\tan} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}. \end{cases}$

Montrer que \sec et \tan sont lisses sur D_{\tan} .

► La fonction \sec est lisse en tant que composée de la fonction $\begin{cases} D_{\tan} \rightarrow \mathbb{R}^* \\ x \mapsto \cos x \end{cases}$ induite par cosinus et

$$\text{de la fonction inverse } \begin{cases} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^* \\ t \mapsto \frac{1}{t}. \end{cases}$$

► La fonction \tan est alors lisse en tant que produit des deux fonctions lisses \sin et \sec .

Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

Une fonction lisse $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sera dite *absolument monotone* (sur I) si $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) \geq 0$.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\tau \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $x \mapsto e^{\tau x}$ soit absolument monotone sur \mathbb{R} .

Notons déjà que la fonction $f : x \mapsto e^{\tau x}$ est lisse par opérations.

On va montrer qu'une condition nécessaire est suffisante est $\tau \geq 0$.

Condition nécessaire. Supposons f absolument monotone. En particulier, on a $\tau = f'(0) \geq 0$.

Condition suffisante. Supposons $\tau \geq 0$. On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n -ième de f est $f^{(n)} : x \mapsto \tau^n e^{\tau x}$, qui est clairement à valeurs positives. Cela montre que f est absolument monotone.

4. La fonction arctan est-elle absolument monotone sur \mathbb{R}_+ ?

La fonction arctan est lisse sur \mathbb{R} (par exemple en tant que réciproque d'une bijection lisse dont la dérivée ne s'annule jamais). D'après le théorème de Taylor-Young, on a donc

$$\arctan(x) = \arctan(0) + \arctan'(0)x + \frac{\arctan''(0)}{2!}x^2 + \frac{\arctan'''(0)}{3!}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3).$$

Par ailleurs, le formulaire garantit que $\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$. Par unicité du développement limité, on en déduit $\arctan'''(0) = -2$, ce qui montre que arctan n'est pas absolument monotone.

(Il y a évidemment d'autres façons de justifier cela, mais on pourra apprécier que la connaissance des DL usuels permet parfois d'éviter des calculs un peu pénibles.)

5. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ l'assertion « il existe des entiers naturels $a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$

$$\text{tels que } \forall x \in D_{\tan}, \tan^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k \tan(x)^k. \text{ »}$$

Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ par récurrence.

Initialisation. On a $\tan^{(0)} = \tan$, donc l'assertion $P(1)$ est vraie : $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$ conviennent.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$.

On peut donc trouver $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n, \tilde{a}_{n+1} \in \mathbb{N}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, \tan^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \tilde{a}_k \tan(x)^k$.

Cette formule nous permet de calculer la dérivée $\tan^{(n+1)} = (\tan^{(n)})'$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a (en notant que $x \mapsto \tilde{a}_0 \tan(x)^0$ est une fonction constante, dont la dérivée est donc nulle).

$$\begin{aligned} \tan^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} \tilde{a}_k k (1 + \tan^2(x)) \tan(x)^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} k \tilde{a}_k \tan(x)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n+1} k \tilde{a}_k \tan(x)^{k+1} \\ &= \sum_{\ell=0}^n (\ell + 1) \tilde{a}_{\ell+1} \tan(x)^\ell + \sum_{\ell=2}^{n+2} (\ell - 1) \tilde{a}_{\ell-1} \tan(x)^\ell \\ &= \tilde{a}_1 + 2\tilde{a}_2 \tan(x) + \sum_{\ell=2}^n [(\ell - 1) \tilde{a}_{\ell-1} + (\ell + 1) \tilde{a}_{\ell+1}] \tan(x)^\ell \\ &\quad + n \tilde{a}_n \tan(x)^{n+1} + (n + 1) \tilde{a}_{n+1} \tan(x)^{n+2}. \end{aligned}$$

On pose alors $a_0 = \tilde{a}_1$, $a_1 = 2\tilde{a}_2$, $a_{n+1} = n\tilde{a}_n$, $a_{n+2} = (n+1)\tilde{a}_{n+1}$ et, pour tout entier « intermédiaire » $\ell \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $a_\ell = (\ell-1)\tilde{a}_{\ell-1} + (\ell+1)\tilde{a}_{\ell+1}$.

On obtient ainsi une liste a_0, \dots, a_{n+2} d'entiers naturels (par stabilité par somme et produit de \mathbb{N}) vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tan^{(n+1)}(x) = \sum_{\ell=0}^{n+2} a_\ell \tan(x)^\ell,$$

ce qui montre $P(n+1)$, et clôt la récurrence.

(b) En déduire que la fonction \tan est absolument monotone sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. D'après la question précédente, on peut trouver des entiers naturels

a_0, a_1, \dots, a_{n+1} tels que $\tan^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k \tan(x)^k$. Comme $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\tan(x) \geq 0$ et on en déduit immédiatement que $\tan^{(n)}(x) \geq 0$.

6. Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions absolument monotones.

(a) Montrer que $f + g$ est absolument monotone.

Déjà, f et g sont lisses, donc $f + g$ est lisse par opérations.

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$. On a

$$(f + g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \geq 0,$$

ce qui montre que $f + g$ est absolument monotone.

(b) Montrer que fg est absolument monotone.

Comme à la question précédente, fg est lisse par opérations.

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$. On a d'après la formule de Leibniz

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \underbrace{\binom{n}{k}}_{\geq 0} \underbrace{f^{(k)}(x)}_{\geq 0} \underbrace{g^{(n-k)}(x)}_{\geq 0},$$

ce qui montre $(fg)^{(n)}(x) \geq 0$, et conclut.

(c) Montrer (par exemple, par récurrence) que $\exp \circ f$ est absolument monotone.

Ici encore, $\exp \circ f$ est lisse par opérations. Notons cette fonction φ .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ l'assertion $\forall x \in I, \varphi^{(n)}(x) \geq 0$.

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ par récurrence forte.

Initialisation. Pour tout $x \in I$, on a $\varphi(x) = e^{f(x)} \geq 0$. Cela démontre $P(0)$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(0)$ et $P(1)$ et \dots et $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.

La dérivée $(n+1)$ -ième de φ est la dérivée n -ième de $\varphi' : x \mapsto f'(x) e^{f(x)} = f'(x) \varphi(x)$. D'après la formule de Leibniz, on a donc, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} \varphi^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi^{(k)}(x) (f')^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi^{(k)}(x) f^{(n-k+1)}(x). \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in I$ et tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

- ▶ $\varphi^{(k)}(x) \geq 0$, d'après P(k) ;
- ▶ $f^{(n-k+1)}(x) \geq 0$, car f est supposée absolument monotone.

On en déduit que $\forall x \in I, \varphi^{(n+1)}(x) \geq 0$, ce qui montre P(n + 1) et clôt la récurrence.

7. Montrer que sec est absolument monotone sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

On a vu que sec est lisse. On va utiliser le fait que sa dérivée est $\sec' = \frac{\sin}{\cos^2} = \sec \tan$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons Q(n) l'assertion « $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \sec^{(n)}(x) \geq 0$. »

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, Q(n)$ par récurrence forte.

Initialisation. Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos(x) > 0$, donc $\sec(x) \geq 0$. Cela montre Q(0).

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que Q(0) et Q(1) ... et Q(n). Montrons Q(n + 1). La dérivée (n + 1)-ième de sec est la dérivée n-ième de $\sec' = \sec \tan$, c'est-à-dire, d'après la formule de Leibniz :

$$\sec^{(n+1)} : x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sec^{(k)}(x) \tan^{(n-k)}(x).$$

Or, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

- ▶ $\sec^{(k)}(x) \geq 0$ d'après Q(n) ;
 - ▶ $\tan^{(n-k)}(x) \geq 0$ d'après la question 5b,
- donc $\sec^{(n+1)}(x) \geq 0$, ce qui montre Q(n + 1) et clôt la récurrence.

Problème. Loi de réciprocité pour les sommes de Dedekind.

Dans tout le problème, b désignera un entier strictement positif.

On notera alors systématiquement $\zeta = \zeta_b = \exp\left(i \frac{2\pi}{b}\right)$.

Partie I. La fonction cotangente.

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction $\cot : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, le quotient $\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ est bien défini si et seulement si $\sin(x) \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$. Ainsi, le domaine de définition cherché est

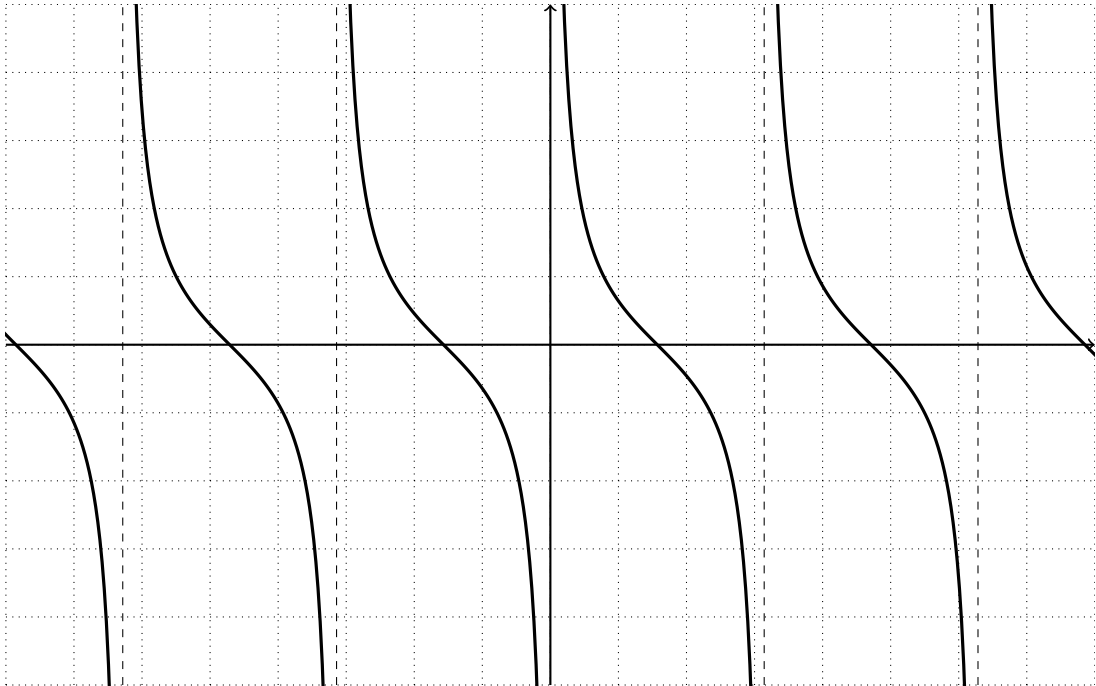
$$D = \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv 0 \pmod{\pi}\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k\pi, (k+1)\pi[.$$

2. Montrer $\forall x \in D, \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$ et tracer le graphe de cot.

Soit $x \in D$. On a bien $\frac{\pi}{2} - x \in D_{\tan}$, puis

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cot(x).$$

On en déduit le graphe de \cot par réflexion par rapport à la droite verticale $x = \frac{\pi}{4}$ à partir du graphe de la fonction tangente.



3. Résoudre l'équation $\cot(x) = \sqrt{3}$, d'inconnue $x \in \mathbb{D}$.

Soit $x \in \mathbb{D}$. On a la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned} \cot(x) = \sqrt{3} &\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{3} && \text{(question préc.)} \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x \equiv \underbrace{\frac{\pi}{3}}_{=\arctan(\sqrt{3})} \pmod{\pi} \\ &\Leftrightarrow x \equiv \underbrace{\frac{\pi}{6}}_{=\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}} \pmod{\pi}, \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions est $\left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

4. Montrer que la fonction $\Lambda : \begin{cases} \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(|\sin(x)|) \end{cases}$ est dérivable, et calculer sa dérivée.

- La fonction Λ est déjà bien définie car, pour tout $x \in \mathbb{D}$, $\sin(x) \neq 0$ donc $|\sin(x)| > 0$.
- La fonction Λ est par ailleurs π -périodique. En effet, le domaine \mathbb{D} est manifestement π -périodique et l'on a, pour tout $x \in \mathbb{D}$,

$$\Lambda(x + \pi) = \ln(|\sin(x + \pi)|) = \ln(|-\sin(x)|) = \ln(|\sin(x)|) = \Lambda(x).$$

- Il suffit donc de vérifier la dérivabilité de Λ en tout point de $]0, \pi[$, qui est crucialement un intervalle sur lequel $\sin > 0$. Soit $x_0 \in]0, \pi[$. Comme Λ et $f : t \mapsto \ln(\sin(t))$ coïncident sur $]0, \pi[$, qui est un voisinage de x_0 , la fonction Λ hérite de la dérivabilité en x_0 de f .

$$\text{Ainsi, } \Lambda \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } \Lambda'(x_0) = f'(x_0) = \frac{\cos(x_0)}{\sin(x_0)} = \cot(x_0).$$

In fine, on a montré que Λ était dérivable sur \mathbb{D} , et que $\Lambda' = \cot$.

5. Soit $b \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1, b-1 \rrbracket$. Calculer $\frac{1 + \zeta^k}{1 - \zeta^k}$ en fonction de \cot .

On a (remarquons que $\zeta^k = \exp\left(i\frac{2\pi}{b}k\right) \neq 1$) :

$$\begin{aligned} \frac{1 + \zeta^k}{1 - \zeta^k} &= \frac{1 + \exp\left(i\frac{2\pi}{b}k\right)}{1 - \exp\left(i\frac{2\pi}{b}k\right)} \\ &= \frac{\exp\left(i\frac{\pi}{b}k\right) \left[\exp\left(-i\frac{\pi}{b}k\right) + \exp\left(i\frac{\pi}{b}k\right) \right]}{\exp\left(i\frac{\pi}{b}k\right) \left[\exp\left(-i\frac{\pi}{b}k\right) - \exp\left(i\frac{\pi}{b}k\right) \right]} \\ &= \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{b}k\right)}{-2i \sin\left(\frac{\pi}{b}k\right)} \\ &= i \cot\left(\frac{\pi}{b}k\right). \end{aligned}$$

6. Soit $x_1, x_2 \in D$ tels que $x_1 + x_2 \in D$. Exprimer $\cot(x_1 + x_2)$ en fonction de $\cot(x_1)$ et $\cot(x_2)$.

Par un calcul en tout point semblable à celui effectué dans le cours, $\cot(x_1 + x_2) = \frac{\cot(x_1) \cot(x_2) - 1}{\cot(x_1) + \cot(x_2)}$.

7. Soit $b \in \mathbb{N}^*$. Le but de cette question est d'établir la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \prod_{s=0}^{b-1} \sin\left(\frac{x+s}{b}\pi\right) = \frac{1}{2^{b-1}} \sin(\pi x).$$

Pour cela, on admettra la factorisation

$$\forall z \in \mathbb{C}, z^b - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_b} (z - \omega), \quad (\star)$$

que le cours sur les polynômes permettra de déduire du fait que l'ensemble \mathbb{U}_b des racines b -ièmes de l'unité est précisément l'ensemble des racines du polynôme $X^b - 1$.

(a) En utilisant la factorisation (\star) , montrer $\forall x \in \mathbb{R}, e^{i2\pi x} - 1 = \prod_{s=0}^{b-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{b}x} - e^{-i\frac{2\pi}{b}s} \right)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On va appliquer (\star) à $z = e^{i\frac{2\pi}{b}x}$ mais il reste à simplifier le second membre de l'égalité.

Il est traditionnel de lister les b éléments de \mathbb{U}_b comme les éléments de la famille $\left(e^{i\frac{2\pi}{b}s} \right)_{s=0}^{b-1}$.

Mais, l'ensemble \mathbb{U}_b étant stable par conjugaison (ou, plus précisément, la conjugaison complexe fournissant une bijection $\mathbb{U}_b \rightarrow \mathbb{U}_b$), on peut également les lister comme les éléments de la famille

$$\text{conjuguée } \left(\overline{e^{i\frac{2\pi}{b}s}} \right)_{s=0}^{b-1} = \left(e^{-i\frac{2\pi}{b}s} \right)_{s=0}^{b-1}.$$

Ainsi, le produit de droite s'écrit

$$\prod_{s=0}^{b-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{b}x} - e^{-i\frac{2\pi}{b}s} \right) = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_b} (z - \omega) = z^b - 1 = e^{i2\pi x} - 1.$$

(b) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, une expression simplifiée du produit $\prod_{s=0}^{b-1} \left(e^{i\frac{\pi}{b}(x+s)} - e^{-i\frac{\pi}{b}(x+s)} \right)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, en faisant apparaître « de force » les termes qui apparaissent dans la question précédente :

$$\begin{aligned}
 \prod_{s=0}^{b-1} \left(e^{i\frac{\pi}{b}(x+s)} - e^{-i\frac{\pi}{b}(x+s)} \right) &= \prod_{s=0}^{b-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{b}x} e^{-i\frac{\pi}{b}x} e^{i\frac{\pi}{b}s} - e^{-i\frac{2\pi}{b}s} e^{i\frac{\pi}{b}s} e^{-i\frac{\pi}{b}x} \right) \\
 &= \prod_{s=0}^{b-1} \left[e^{i\frac{\pi}{b}s} e^{-i\frac{\pi}{b}x} \left(e^{i\frac{2\pi}{b}x} - e^{-i\frac{2\pi}{b}s} \right) \right] \\
 &= \underbrace{\prod_{s=0}^{b-1} e^{i\frac{\pi}{b}s}}_{=e^{i\frac{\pi}{b}(0+1+\dots+b-1)}} \underbrace{\prod_{s=0}^{b-1} e^{-i\frac{\pi}{b}x}}_{=(e^{-i\frac{\pi}{b}x})^b} \prod_{s=0}^{b-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{b}x} - e^{-i\frac{2\pi}{b}s} \right) \\
 &= e^{i\pi\frac{b-1}{2}} e^{-i\pi x} (e^{i2\pi x} - 1) \\
 &= i^{b-1} (e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}).
 \end{aligned}$$

(c) Conclure.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
 \prod_{s=0}^{b-1} \sin\left(\frac{x+s}{b}\pi\right) &= \prod_{s=0}^{b-1} \frac{e^{i\frac{x+s}{b}\pi} - e^{-i\frac{x+s}{b}\pi}}{2i} \\
 &= \frac{1}{(2i)^b} \prod_{s=0}^{b-1} \left(e^{i\frac{\pi}{b}(x+s)} - e^{-i\frac{\pi}{b}(x+s)} \right) \\
 &= \frac{1}{(2i)^b} i^{b-1} (e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}) \quad (\text{question préc.}) \\
 &= \frac{1}{2^{b-1}} \frac{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}{2i} \\
 &= \frac{\sin(\pi x)}{2^{b-1}}.
 \end{aligned}$$

8. Déduire de la question précédente $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\cot(\pi x) = \frac{1}{b} \sum_{s=0}^{b-1} \cot\left(\frac{x+s}{b}\pi\right)$.

La question précédente montre que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a l'égalité $\prod_{s=0}^{b-1} \sin\left(\frac{x+s}{b}\pi\right) = \frac{1}{2^{b-1}} \sin(\pi x)$.

Remarquons que, comme $x \notin \mathbb{Z}$, on a $\pi x \in \mathbb{D}$, donc cette égalité concerne des nombres non nuls. En passant à la valeur absolue puis au logarithme, on a donc l'égalité des deux fonctions

$$\begin{aligned}
 \varphi : \begin{cases} \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln\left(\left|\prod_{s=0}^{b-1} \sin\left(\frac{x+s}{b}\pi\right)\right|\right) &= \sum_{s=0}^{b-1} \ln\left(\left|\sin\left(\frac{x+s}{b}\pi\right)\right|\right) = \sum_{s=0}^{b-1} \Lambda\left(\frac{x+s}{b}\pi\right) \end{cases} \\
 \text{et } \psi : \begin{cases} \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln\left(\left|\frac{\sin(\pi x)}{2^{b-1}}\right|\right) &= \ln(|\sin(\pi x)|) - \ln(2^{b-1}) = \Lambda(\pi x) - (b-1)\ln(2). \end{cases}
 \end{aligned}$$

Par opérations et à l'aide de la question 4, les fonctions φ et ψ sont dérivables, donc l'égalité $\varphi = \psi$ entraîne $\varphi' = \psi'$, c'est-à-dire

$$\forall x \in D, \frac{\pi}{b} \sum_{s=0}^{b-1} \cot\left(\frac{x+s}{b}\pi\right) = \pi \cot(\pi x),$$

ce qui est clairement équivalent à l'égalité demandée.

Partie II. Une représentation des fonctions b -périodiques $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$.

Dans toute cette partie, on fixe un entier $b \in \mathbb{N}^*$.

On étend la notion de fonction b -périodique à des fonctions $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$.

Une fonction $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ est donc dite b -périodique si $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n+b) = f(n)$.

On rappelle qu'étant donné une assertion A , on note $\mathbb{1}_{(A)} = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ est vraie} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

En particulier, si n et $m \in \mathbb{Z}$, le nombre $\mathbb{1}_{(n \equiv m \pmod{b})}$ (que l'on pourra ici noter simplement $\mathbb{1}_{(n \equiv m)}$) vaut 1 si n et m sont congrus modulo b , c'est-à-dire si $n - m$ est un multiple de b , et 0 sinon.

9. Soit $c_0, \dots, c_{b-1} \in \mathbb{C}$. Montrer que la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \\ n \mapsto \sum_{k=0}^{b-1} c_k \zeta^{kn} \end{cases}$ est b -périodique.

C'est un calcul direct.

- ▶ Commençons par remarquer que, pour tout $k \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a la chaîne d'égalités $\zeta^{k(n+b)} = \zeta^{kn+kb} = \zeta^{kn} (\zeta^b)^n = \zeta^{kn}$.
- ▶ Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$f(n+b) = \sum_{k=0}^{b-1} c_k \zeta^{k(n+b)} = \sum_{k=0}^{b-1} c_k \zeta^{kn} = f(n),$$

ce qui conclut.

10. Soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction b -périodique. Montrer $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = \sum_{j=0}^{b-1} f(j) \mathbb{1}_{(n \equiv j)}$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Soit n_0 l'unique élément de $\llbracket 0, b-1 \rrbracket$ tel que $n \equiv n_0 \pmod{b}$. On a alors « l'effondrement »

$$\sum_{j=0}^{b-1} f(j) \underbrace{\mathbb{1}_{(n \equiv j)}}_{=0 \text{ si } j \neq n_0} = f(n_0) \mathbb{1}_{(n \equiv n_0)} = f(n_0).$$

Comme f est b -périodique et que $n \equiv n_0 \pmod{b}$, on a $f(n_0) = f(n)$, ce qui conclut.

11. Soit $a \in \mathbb{Z}$.

- (a) Montrer que $\zeta^a = 1$ si et seulement si a est un multiple de b .

On a la chaîne d'équivalences

$$\zeta^a = 1 \Leftrightarrow \exp\left(i \frac{2\pi}{b} a\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{b} a \equiv 0 \pmod{2\pi} \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{b},$$

et cette dernière condition est clairement équivalente au fait que a est un multiple de b .

(b) Calculer la somme $\Sigma(a) = \frac{1}{b} \sum_{j=0}^{b-1} \zeta^{aj}$ en fonction de a .

► Si a est un multiple de b , on a $\zeta^a = 1$ d'après la question précédente, puis $\Sigma(a) = \frac{1}{b} \sum_{j=0}^{b-1} 1^j = 1$.

► Sinon, le nombre ζ^a est différent de 1, et on peut appliquer la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\Sigma(a) = \frac{1}{b} \sum_{j=0}^{b-1} (\zeta^a)^j = \frac{1}{b} \frac{1 - (\zeta^a)^b}{1 - \zeta^a} = 0,$$

$$\text{car } (\zeta^a)^b = \zeta^{ab} = (\zeta^b)^a = 1^a = 1.$$

Pour faire chic, $\Sigma(a) = \mathbb{1}_{(a \equiv 0)}$.

12. Soit $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction b -périodique. Pour tout $k \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$, on définit $\varphi_k = \frac{1}{b} \sum_{j=0}^{b-1} f(j) \zeta^{-jk}$.

Montrer la formule de synthèse de Fourier :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = \sum_{k=0}^{b-1} \varphi_k \zeta^{kn}.$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a

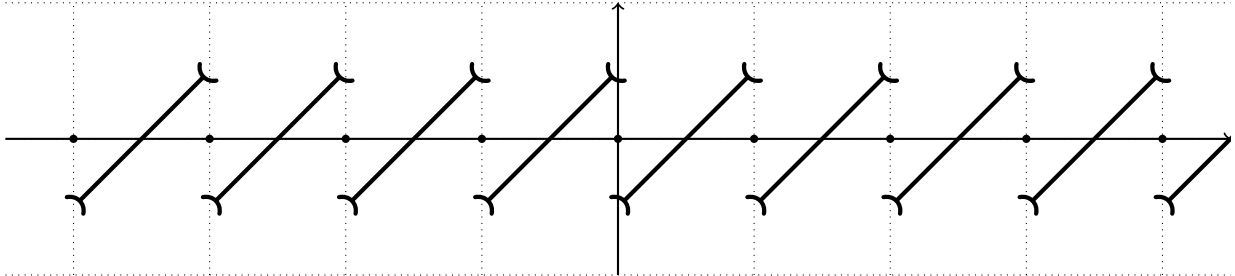
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{b-1} \varphi_k \zeta^{kn} &= \sum_{k=0}^{b-1} \left(\frac{1}{b} \sum_{j=0}^{b-1} f(j) \zeta^{-jk} \right) \zeta^{kn} \\ &= \frac{1}{b} \sum_{k=0}^{b-1} \sum_{j=0}^{b-1} f(j) \zeta^{-jk} \zeta^{kn} \\ &= \frac{1}{b} \sum_{j=0}^{b-1} \sum_{k=0}^{b-1} f(j) \zeta^{(n-j)k} \\ &= \sum_{j=0}^{b-1} f(j) \underbrace{\left(\frac{1}{b} \sum_{k=0}^{b-1} \zeta^{(n-j)k} \right)}_{=\Sigma(n-j)=\mathbb{1}_{(n-j \equiv 0)}} \\ &= \sum_{j=0}^{b-1} f(j) \mathbb{1}_{(n \equiv j)} \\ &= f(n) \end{aligned}$$

d'après la question 10.

Partie III. Sommes de Dedekind.

Dans cette partie, on définit une fonction $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en imposant :

- ▶ que w soit 1-périodique ;
- ▶ que $w(0) = 0$ (ce qui force $\forall n \in \mathbb{Z}, w(n) = 0$) ;
- ▶ que $\forall t \in]0, 1[, w(t) = t - \frac{1}{2}$.



Le graphe de w .

Pour deux entiers $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, on définit alors

$$s(a, b) = \sum_{\ell=0}^{b-1} w\left(\frac{\ell}{b}\right) w\left(\frac{a\ell}{b}\right).$$

13. Soit $b \in \mathbb{N}^*$. Calculer $s(1, b)$.

On a

$$\begin{aligned} s(1, b) &= \sum_{\ell=1}^{b-1} \left(\frac{\ell}{b} - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \sum_{\ell=1}^{b-1} \left(\frac{2\ell - b}{2b}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4b^2} \sum_{\ell=1}^{b-1} (2\ell - b)^2 \\ &= \frac{1}{4b^2} \sum_{\ell=1}^{b-1} 4\ell^2 - \frac{1}{4b^2} \sum_{\ell=1}^b 4\ell b + \frac{1}{4b^2} \sum_{\ell=1}^{b-1} b^2 \\ &= \frac{(b-1)b(2b-1)}{6b^2} - \frac{(b-1)b^2}{2b^2} + \frac{(b-1)b^2}{4b^2} \\ &= \frac{(b-1)(2b-1)}{6b} - \frac{b-1}{2} + \frac{b-1}{4} \\ &= \frac{2b^2 - 3b + 1}{6b} - \frac{b-1}{4} \\ &= \frac{b}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6b} - \frac{b}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{b}{12} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6b}. \end{aligned}$$

Dans la suite de cette partie, on applique la partie précédente à la fonction $n \mapsto w\left(\frac{n}{b}\right)$, qui est bien n -périodique (on ne demande pas de le démontrer). On pose donc, pour tout $k \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$,

$$\varphi_k = \frac{1}{b} \sum_{j=0}^{b-1} w\left(\frac{j}{b}\right) \zeta^{-jk}.$$

14. Calculer le coefficient φ_0 .

On a

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \frac{1}{b} \sum_{j=0}^{b-1} w \left(\frac{j}{b} \right) \\ &= \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{b-1} \left(\frac{j}{b} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{b} \left[\frac{1}{b} \sum_{j=1}^{b-1} j - \frac{b-1}{2} \right] \\ &= \frac{1}{b} \left[\frac{1}{b} \frac{(b-1)b}{2} - \frac{b-1}{2} \right] = 0.\end{aligned}$$

15. Soit $\xi \in \mathbb{U}_b$. On note $S(\xi) = \sum_{j=0}^{b-1} j \xi^j$.

(a) Calculer $(\xi - 1)S(\xi) + \sum_{j=0}^{b-1} \xi^{j+1}$ en se ramenant à une somme télescopique.

On a

$$\begin{aligned}(\xi - 1)S(\xi) + \sum_{j=0}^{b-1} \xi^j &= \sum_{j=0}^{b-1} (j \xi^{j+1} - j \xi^j) + \sum_{j=0}^{b-1} \xi^{j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{b-1} ((j+1) \xi^{j+1} - j \xi^j) \\ &= b \xi^b - 0 \xi^0 \quad (\text{par télescopage}) \\ &= b.\end{aligned}$$

(b) En déduire une expression de $S(\xi)$, dans le cas $\xi \neq 1$.

Si $\xi \neq 1$, le même genre d'arguments qu'à la question 11b montre que $\sum_{j=0}^{b-1} \xi^j = 0$, si bien que l'on

obtient $(\xi - 1)S(\xi) = b$, puis $S(\xi) = \frac{b}{\xi - 1}$.

16. Pour $k \in \llbracket 1, b-1 \rrbracket$, calculer le coefficient φ_k .

Soit $k \in \llbracket 1, b-1 \rrbracket$. On a donc $\zeta^{-k} = \overline{\zeta^k} \neq 1$ et donc

$$\begin{aligned}\varphi_k &= \frac{1}{b} \sum_{j=0}^{b-1} w \left(\frac{j}{b} \right) \zeta^{-jk} \\ &= \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{b-1} \left(\frac{j}{b} - \frac{1}{2} \right) \zeta^{-jk} \\ &= \frac{1}{b^2} \underbrace{\sum_{j=1}^{b-1} j \zeta^{-jk}}_{=S(\zeta^{-k})} - \frac{1}{2b} \underbrace{\sum_{j=1}^{b-1} \zeta^{-jk}}_{=\Sigma(-k)-\zeta^0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{b^2} \frac{b}{\zeta^{-k} - 1} + \frac{1}{2b} \\
&= \frac{1}{2b} \left(\frac{2}{\zeta^{-k} - 1} + 1 \right) \\
&= \frac{1}{2b} \left(\frac{2\zeta^k}{1 - \zeta^k} + 1 \right) \\
&= \frac{1}{2b} \frac{1 + \zeta^k}{1 - \zeta^k}.
\end{aligned}$$

17. Dédurre de ce qui précède la formule

$$\forall n \in \mathbb{Z}, w\left(\frac{n}{b}\right) = \frac{1}{2b} \sum_{k=1}^{b-1} \frac{1 + \zeta^k}{1 - \zeta^k} \zeta^{kn}.$$

Il suffit maintenant d'appliquer la question 12 !

Partie IV. Loi de réciprocité.

Jusqu'à la fin du devoir, $a, b \in \mathbb{N}^*$ sont des entiers premiers entre eux.

18. (a) Montrer $s(a, b) = \frac{1}{4b} \sum_{\ell=1}^{b-1} \frac{1 + \zeta^\ell}{1 - \zeta^\ell} \frac{1 + \zeta^{-a\ell}}{1 - \zeta^{-a\ell}}$.

En développant grâce à la question précédente :

$$\begin{aligned}
s(a, b) &= \sum_{j=0}^{b-1} w\left(\frac{j}{b}\right) w\left(\frac{aj}{b}\right) \\
&= \frac{1}{4b^2} \sum_{j=0}^{b-1} \left(\sum_{k=1}^{b-1} \frac{1 + \zeta^k}{1 - \zeta^k} \zeta^{kj} \right) \left(\sum_{\ell=1}^{b-1} \frac{1 + \zeta^\ell}{1 - \zeta^\ell} \zeta^{\ell j} \right) \\
&= \frac{1}{4b} \sum_{k=1}^{b-1} \sum_{\ell=1}^{b-1} \frac{1 + \zeta^k}{1 - \zeta^k} \frac{1 + \zeta^\ell}{1 - \zeta^\ell} \left(\frac{1}{b} \sum_{j=0}^{b-1} \zeta^{(k+a\ell)j} \right) \\
&= \frac{1}{4b} \sum_{\ell=1}^{b-1} \sum_{k=1}^{b-1} \frac{1 + \zeta^k}{1 - \zeta^k} \frac{1 + \zeta^\ell}{1 - \zeta^\ell} \Sigma(k + a\ell).
\end{aligned}$$

C'est là que l'hypothèse de coprimauté de a et b intervient. D'après la question 11b, la somme $\Sigma(k + a\ell)$ vaut 0, sauf si $k + a\ell \equiv 0 \pmod{b}$, c'est-à-dire si $k \equiv -a\ell \pmod{b}$. On sait qu'il existe un unique entier $k_\ell \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$ tel que $k_\ell \equiv -a\ell \pmod{b}$. Remarquons :

- que pour cet entier, on a $\zeta^{k_\ell} = \zeta^{-a\ell}$, par b -périodicité de la fonction $n \mapsto \zeta^n$;
- surtout, que cet entier k_ℓ appartient en fait à $\llbracket 1, b-1 \rrbracket$.

En effet, $k_\ell = 0$ entraînerait $-a\ell \equiv 0 \pmod{b}$, c'est-à-dire que b diviserait $a\ell$. Or, puisque a est premier avec b , le lemme de Gauss entraînerait que b divise ℓ , ce qui est impossible car $\ell \in \llbracket 1, b-1 \rrbracket$.

Ainsi, notre somme « s'effondre » :

$$\begin{aligned} s(a, b) &= \frac{1}{4b} \sum_{\ell=1}^{b-1} \frac{1 + \zeta^{k_\ell}}{1 - \zeta^{k_\ell}} \frac{1 + \zeta^\ell}{1 - \zeta^\ell} \\ &= \frac{1}{4b} \sum_{\ell=1}^{b-1} \frac{1 + \zeta^{-a\ell}}{1 - \zeta^{-a\ell}} \frac{1 + \zeta^\ell}{1 - \zeta^\ell}, \end{aligned}$$

ce qui conclut.

(b) En déduire $s(a, b) = \frac{1}{4b} \sum_{\ell=1}^{b-1} \cot\left(\frac{\pi\ell}{b}\right) \cot\left(\frac{\pi a\ell}{b}\right)$.

En utilisant la question 5, il vient immédiatement

$$\begin{aligned} s(a, b) &= \frac{1}{4b} \sum_{\ell=1}^{b-1} i \cot\left(\frac{\pi\ell}{b}\right) i \cot\left(-\frac{\pi a\ell}{b}\right) \\ &= -\frac{1}{4b} \sum_{\ell=1}^{b-1} \cot\left(\frac{\pi\ell}{b}\right) \cot\left(-\frac{\pi a\ell}{b}\right) \\ &= \frac{1}{4b} \sum_{\ell=1}^{b-1} \cot\left(\frac{\pi\ell}{b}\right) \cot\left(\frac{\pi a\ell}{b}\right), \end{aligned}$$

par imparité (claire, par opérations) de la fonction cot.

19. La formule de la question 8 reste valable après avoir remplacé b par a . En l'appliquant au facteur $\cot\left(\frac{\pi a\ell}{b}\right)$ de la somme précédente, montrer la loi de réciprocité des sommes de Dedekind :

$$s(a, b) + s(b, a) = \frac{1}{12} \left(\frac{a}{b} + \frac{1}{ab} + \frac{b}{a} \right) - \frac{1}{4}.$$

Considérons d'abord $s(a, b)$. On suit l'indication de l'énoncé en écrivant, pour tout $\ell \in \llbracket 0, b-1 \rrbracket$,

$$\cot\left(\frac{\pi a\ell}{b}\right) = \frac{1}{a} \sum_{s=0}^{a-1} \cot\left(\frac{\frac{a\ell}{b} + s}{a} \pi\right)$$

$$= \frac{1}{a} \sum_{s=0}^{a-1} \cot\left(\frac{\pi\ell}{b} + \frac{\pi s}{a}\right)$$

donc $s(a, b) = \frac{1}{4ab} \sum_{\ell=1}^{b-1} \sum_{s=0}^{a-1} \cot\left(\frac{\pi\ell}{b}\right) \cot\left(\frac{\pi\ell}{b} + \frac{\pi s}{a}\right)$

et symétriquement $s(b, a) = \frac{1}{4ab} \sum_{s=1}^{a-1} \sum_{\ell=0}^{b-1} \cot\left(\frac{\pi s}{a}\right) \cot\left(\frac{\pi s}{a} + \frac{\pi\ell}{b}\right)$

donc $s(a, b) + s(b, a) = \frac{1}{4ab} [S + S' + S'']$,

où $S = \sum_{s=1}^{a-1} \sum_{\ell=1}^{b-1} \left(\cot\left(\frac{\pi s}{a}\right) + \cot\left(\frac{\pi\ell}{b}\right) \right) \cot\left(\frac{\pi s}{a} + \frac{\pi\ell}{b}\right)$,

$$S' = \sum_{\ell=1}^{b-1} \cot\left(\frac{\pi\ell}{b}\right)^2 = 4b s(1, b)$$

$$S'' = \sum_{s=1}^{a-1} \cot\left(\frac{\pi s}{a}\right)^2 = 4a s(1, a).$$

Il reste à calculer la double somme S . Cela se simplifie grandement :

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{s=1}^{a-1} \sum_{\ell=1}^{b-1} \left(\cot\left(\frac{\pi s}{a}\right) + \cot\left(\frac{\pi \ell}{b}\right) \right) \cot\left(\frac{\pi s}{a} + \frac{\pi \ell}{b}\right), \\
 &= \sum_{s=1}^{a-1} \sum_{\ell=1}^{b-1} \left(\cot\left(\frac{\pi s}{a}\right) \cot\left(\frac{\pi \ell}{b}\right) - 1 \right) \quad (\text{formule d'addition}) \\
 &= -(a-1)(b-1),
 \end{aligned}$$

car la symétrie (facile à montrer) $\forall t \in \mathbb{D}, \cot(\pi - t) = -\cot(t)$ et un changement d'indices permettent de montrer que la somme sur s est égale à son opposée, et donc nulle :

$$\sum_{s=1}^{a-1} \cot\left(\frac{\pi s}{a}\right) = \sum_{\sigma=1}^{a-1} \cot\left(\frac{\pi(a-\sigma)}{a}\right) = \sum_{\sigma=1}^{a-1} \cot\left(\pi - \frac{\pi\sigma}{a}\right) = -\sum_{\sigma=1}^{a-1} \cot\left(\frac{\pi\sigma}{a}\right) = -\sum_{s=1}^{a-1} \cot\left(\frac{\pi s}{a}\right).$$

In fine,

$$\begin{aligned}
 s(a, b) + s(b, a) &= \frac{-(a-1)(b-1) + 4a s(1, a) + 4b s(1, b)}{4ab} \\
 &= -\frac{1}{4} + \frac{ab - (a-1)(b-1)}{4ab} + \frac{s(1, a)}{b} + \frac{s(1, b)}{a} \\
 &= -\frac{1}{4} + \frac{a+b-1}{4ab} + \frac{1}{b} \left(-\frac{1}{4} + \frac{a}{12} + \frac{1}{6a} \right) + \frac{1}{a} \left(-\frac{1}{4} + \frac{b}{12} + \frac{1}{6b} \right) \\
 &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4a} - \frac{1}{4ab} - \frac{1}{4b} + \frac{a}{12b} + \frac{1}{6ab} - \frac{1}{4a} + \frac{b}{12a} + \frac{1}{6ab} \\
 &= \frac{1}{12} \left(\frac{a}{b} + \frac{1}{ab} + \frac{b}{a} \right) - \frac{1}{4},
 \end{aligned}$$

ce qui conclut ce beau calcul.