Quatrième composition de mathématiques [corrigé]

Exercice 1

Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $x_{n+1} = x_1$.

Montrer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} \geqslant n$.

D'après l'inégalité arithmético-géométrique,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} &\geqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k}\right)^{1/n} \\ &\geqslant \left(\frac{x_{n+1}}{x_1}\right)^{1/n} && \textit{(télescopage)} \\ &\geqslant 1, \end{aligned}$$

ce qui équivaut à l'inégalité demandée.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) < 0$.

- *Si, pour tout $x \geqslant x_0$, on avait $f(x) \leqslant f(x_0)$, on obtiendrait $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \leqslant f(x_0) < 0$ par passage à la limite dans les inégalités larges, ce qui est absurde.*
- *Ainsi, on sait pouvoir trouver $x_1 > x_0$ tel que $f(x_1) > f(x_0)$. La sécante passant par x_0 et x_1 est le graphe d'une certaine fonction affine h qui vérifie d'après le cours $\forall x \geqslant x_1, f(x) \geqslant h(x)$.*

  Mais la pente de la sécante est $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} > 0$, donc $h(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. D'après le théorème de minoration, on en déduit $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, une contradiction.

Problème. Contrôle uniforme de la dérivée.

Dans tout l'énoncé, on fixe un entier $n \geqslant 1$.

Partie I. Interpolation de Lagrange : questions de cours et compléments.

1. Soit $x_1 < \cdots < x_n$ des nombres réels.
   (a) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Rappeler sans démonstration un polynôme L_j de degré $n-1$ tel que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], L_j(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme on l'a vu en cours, le polynôme $L_j = \dfrac{\displaystyle\prod_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \neq j}} (X - x_k)}{\displaystyle\prod_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \neq j}} (x_j - x_k)}$ *convient.*

   (b) Montrer $\forall S \in \mathbb{R}_{n-1}[X], S = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j L_j$, après avoir remplacé les λ_j par les nombres réels (dépendant de S) appropriés.

Soit $S \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. *Considérons le polynôme* $\widehat{S} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} S(x_j) L_j$.

- *Par stabilité par combinaison linéaire, on a* $\widehat{S} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- *Pour tout* $j_0 \in [\![1, n]\!]$, *on a*

$$\widehat{S}(x_{j_0}) = \sum_{j=1}^{n} S(x_j) \underbrace{L_j(x_{j_0})}_{= \mathbb{1}_{(j=j_0)}} = S(x_{j_0}).$$

Les deux polynômes S *et* $\widehat{S}$ *de* $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ *coïncidant sur les* n *points* $x_1, \ldots, x_n$, *ils sont égaux par rigidité des polynômes, ce qui conclut.*

2. Soit $\Omega \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n dont $x_1, \ldots, x_n$ sont racines. On note α son coefficient dominant.
   (a) Déterminer la décomposition de Ω en facteurs irréductibles.

Le théorème de factorisation permet de trouver un quotient $Q \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $\Omega = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} (X - x_j) Q$.

L'examen des degrés montre que $\deg Q = 0$ *:* Q *est un polynôme constant non nul.*

Comme $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} (X - x_j)$ *est unitaire, les polynômes* Ω *et* Q *ont le même coefficient dominant :* α.

On déduit de tout cela que $Q = \alpha$, *c'est-à-dire la factorisation* $\Omega = \alpha \displaystyle\prod_{j=1}^{n} (X - x_j)$. *Comme tous les facteurs sont de degré* 1, *il s'agit bien de la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme (scindé)* Ω.

(b) Démontrer soigneusement $\Omega' = \alpha \sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \neq j}} (X - x_k)$.

- *Pour tout* $m \in \mathbb{N}$, *on note* $P(m)$ *l'assertion*

$$\text{« pour tous } x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R},\ \left[\prod_{j=1}^{m} (X - x_j)\right]' = \sum_{j=1}^{m} \prod_{\substack{k \in [\![1,m]\!] \\ k \neq j}} (X - x_j). \text{ »}$$

Démontrons $\forall m \in \mathbb{N}, P(m)$ *par récurrence.*

Initialisation. *L'assertion* $P(0)$ *est triviale : elle affirme que la dérivée d'un produit vide (qui vaut donc* 1*) est une somme vide (qui vaut donc* 0*).*

Hérédité. *Soit* $m \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $P(m)$. *Soit* $x_1, \dots, x_m, x_{m+1} \in \mathbb{R}$.

On a $\prod_{j=1}^{m+1} (X - x_j) = \prod_{j=1}^{m} (X - x_j) \times (X - x_{m+1})$, *donc*

$$\begin{aligned}
\left[\prod_{j=1}^{m+1} (X - x_j)\right]' &= \left[\prod_{j=1}^{m} (X - x_j)\right]' (X - x_{m+1}) + \prod_{j=1}^{m} (X - x_j) \underbrace{(X - x_{m+1})'}_{=1} \\
&= (X - x_{m+1}) \sum_{j=1}^{m} \prod_{\substack{k \in [\![1,m]\!] \\ k \neq j}} (X - x_k) + \prod_{j=1}^{m} (X - x_j) && \text{(d'après } P(m)\text{)} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \prod_{\substack{k \in [\![1,m+1]\!] \\ k \neq j}} (X - x_j) + \prod_{\substack{k \in [\![1,m+1]\!] \\ k \neq m+1}} (X - x_k) \\
&= \sum_{j=1}^{m+1} \prod_{\substack{k \in [\![1,m+1]\!] \\ k \neq j}} (X - x_j),
\end{aligned}$$

ce qui montre $P(m+1)$ *et clôt la récurrence.*

- *En appliquant ce résultat à* $m = n$, *on en déduit*

$$\Omega' = \left[\alpha \prod_{j=1}^{n} (X - x_j)\right]' = \alpha \sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \neq j}} (X - x_j).$$

(c) En déduire

$$\forall S \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}, S(x) = \sum_{j=1}^{n} S(x_j) \frac{\Omega(x)}{(x - x_j)\, \Omega'(x_j)}.$$

Soit $S \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. *Soit* $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$.

D'après la question 1, *on a*

$$S(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} S(x_j) L_j\right)(x) = \sum_{j=1}^{n} S(x_j) L_j(x).$$

Or, pour tout $j_0 \in [\![1, n]\!]$, $\Omega'(x_{j_0}) = \alpha \sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{k\in[\![1,n]\!] \\ k\neq j}} \underbrace{(x_{j_0} - x_k)}_{=0 \text{ si } k \neq j_0}$.

Dans presque tous les cas, le produit correspondant à l'indice $j \in [\![1, n]\!]$ vaudra 0, car le facteur $k = j_0$ sera nul. La seule exception est quand $j = j_0$. La somme s'effondre donc et

$$\Omega'(x_{j_0}) = \alpha \prod_{\substack{k\in[\![1,n]\!] \\ k\neq j_0}} (x_{j_0} - x_k).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} S(x_j) \frac{\Omega(x)}{(x - x_j)\,\Omega'(x_j)} &= \sum_{j=1}^{n} S(x_j) \frac{\alpha \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)}{(x - x_j)\, \alpha \prod_{\substack{k\in[\![1,n]\!] \\ k\neq j}} (x_j - x_k)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} S(x_j) \frac{\prod_{\substack{k\in[\![1,n]\!] \\ k\neq j}} (x - x_k)}{\prod_{\substack{k\in[\![1,n]\!] \\ k\neq j}} (x_j - x_k)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} S(x_j)\, L_j(x) = S(x).
\end{aligned}$$

Partie II. Une observation de Dimitriĭ Ivanovič Mendeleev.

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $P = aX^2 + bX + c$. Soit $m \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in [-1, 1]\,, |P(x)| \leqslant m$.

3. Montrer $\forall x \in [-1, 1]\,, \left|P'(x)\right| \leqslant \max\left(\left|P'(-1)\right|, \left|P'(1)\right|\right)$.

   Soit $x \in [-1, 1]$. On peut donc trouver $\lambda \in [0, 1]$ tel que $x = (1 - \lambda) \times (-1) + \lambda \times 1$.

   Comme P' est affine (donc concave et convexe), on a $P'(x) = (1 - \lambda)P'(-1) + \lambda P'(1)$.

   D'après l'inégalité triangulaire, on en déduit, en notant $M = \max\left(\left|P'(-1)\right|, \left|P'(1)\right|\right)$:

   $$\left|P'(x)\right| \leqslant (1 - \lambda)\left|P'(-1)\right| + \lambda\left|P'(1)\right| \leqslant (1 - \lambda)M + \lambda M = M.$$

4. Trouver $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ (ne dépendant pas de P) tels que $P'(1) = \lambda P(-1) + \mu P(0) + \nu P(1)$.

   On a

   $$P'(1) = 2a + b \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} P(-1) = a - b + c \\ P(0) = \phantom{a - b + {}} c \\ P(1) = a + b + c. \end{cases}$$

   Ainsi, pour tous $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\lambda P(-1) + \mu P(0) + \nu P(1) = (\lambda + \nu)a + (-\lambda + \nu)b + (\lambda + \mu + \nu)c$.

   En résolvant un petit système somme-différence, on voit qu'il faut et il suffit que $\lambda = 1/2$ et $\nu = -3/2$ pour que le coefficient devant a (resp. b) vaille 2 (resp. 1). En réglant $\nu = -\lambda - \mu = -2$, on annule également celui devant c. Ainsi,

   $$\frac{1}{2}P(-1) - 2P(0) + \frac{3}{2}P(1) = 2a + b = P'(1).$$

5. En déduire que $\forall x \in [-1,1]\,, \left|P'(x)\right| \leqslant 4m$.

   ► *D'après la question précédente et l'inégalité triangulaire,*

   $$\left|P'(1)\right| = \left|\frac{1}{2}P(-1) - 2P(0) + \frac{3}{2}P(1)\right| \leqslant \frac{1}{2}|P(-1)| + 2|P(0)| + \frac{3}{2}|P(1)| \leqslant \left(\frac{1}{2} + 2 + \frac{3}{2}\right) m = 4m.$$

   ► *On montre de même (en refaisant le calcul précédent ou en l'appliquant avec un peu de soin au polynôme* $-P(-X)$*) que* $P'(-1) = -\frac{3}{2}P(-1) + 2P(0) - \frac{1}{2}P(1)$*, si bien que*

   $$\left|P'(-1)\right| = \left|-\frac{3}{2}P(-1) + 2P(0) - \frac{1}{2}P(1)\right| \leqslant \frac{3}{2}|P(-1)| + 2|P(0)| + \frac{1}{2}|P(1)| \leqslant 4m.$$

   On en déduit que, pour tout $x \in [-1,1]$*,*

   $$\left|P'(x)\right| \leqslant \max\left(\left|P'(-1)\right|, \left|P'(1)\right|\right) \leqslant 4m,$$

   ce qui conclut la démonstration du théorème de Mendeleev *.

Partie III. Complements sur les polynômes de Čebyšëv.

On rappelle qu'il existe un polynôme $T = T_n$ de degré n et de coefficient dominant strictement positif tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, T\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta)$. Il possède n racines, que l'on range par ordre **décroissant** :

$$(\xi_j)_{j=1}^n = \left(\cos\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right)\right)_{j=1}^n \quad : \qquad \xi_n = \cos\left(\frac{2n-1}{2n}\pi\right) < \cdots < \xi_2 = \cos\left(\frac{3}{2n}\pi\right) < \xi_1 = \cos\left(\frac{1}{2n}\pi\right)$$

appartenant toutes à $]-1,1[$.

6. (a) Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin(\theta)\, T'\big(\cos(\theta)\big) = n\, \sin(n\theta)$.

   Les fonctions $\theta \mapsto \cos(n\theta)$ *et* $\theta \mapsto T\big(\cos(\theta)\big)$ *sont dérivables et égales, donc leurs dérivées sont égales, ce qui montre*

   $$\forall \theta \in \mathbb{R}, -n\sin(n\theta) = -\sin(\theta)\, T'\big(\cos(\theta)\big),$$

   formule évidemment équivalente à celle de l'énoncé.

   (b) En déduire $\forall x \in [-1,1]\,, \left|T'(x)\right| \leqslant n^2$.

   À l'aide de la formule d'addition des sinus, on montre facilement par récurrence la formule

   $$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |\sin(n\theta)| \leqslant n|\sin(\theta)|. \tag{$*$}$$

   Soit maintenant $x \in]-1,1[$*. On peut donc trouver* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $\cos(\theta) = x$*. Comme* $\cos^2(\theta) \neq 1$*, on a* $\sin^2(\theta) \neq 0$*, c'est-à-dire* $\sin(\theta) \neq 0$*. La formule de la question précédente s'écrit alors*

   $$\left|T'(x)\right| = \left|n\,\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}\right| \leqslant n^2,$$

   d'après $(*)$*.*

---

*. Il manquait la valeur absolue dans l'énoncé distribué. *Mea culpa*.

On a donc montré $\forall x \in \left]-1,1\right[, \left|T'(x)\right| \leqslant n^2$. Comme T est une fonction polynomiale donc lisse, on a par ailleurs $\left|T'(x)\right| \xrightarrow[x\to\pm1]{} \left|T'(\pm1)\right|$ par continuité de $x \mapsto T'(x)$, donc $\left|T'(\pm1)\right| \leqslant n^2$ par passage à la limite dans les inégalités larges.

Cela conclut la démonstration.

(c) Montrer $\forall j \in [\![1,n]\!], \left|T'(\xi_j)\right| = \dfrac{n}{\sqrt{1-\xi_j^2}}$.

Soit $j \in [\![1,n]\!]$. D'après la question 6a, on a $\sin\left(\dfrac{2j-1}{2n}\pi\right) T'(\xi_j) = n\sin\left(n\dfrac{2j-1}{2n}\pi\right)$. Or,

- *comme $\dfrac{2j-1}{2n}\pi \in [0,\pi]$, on a*

$$\sin\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right) = \sqrt{1-\cos^2\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right)} = \sqrt{1-\xi_j^2}\,;$$

- $\sin\left(n\dfrac{2j-1}{2n}\pi\right) = \sin\Bigg(\underbrace{(2j-1)\frac{\pi}{2}}_{\equiv\frac{\pi}{2}\ (\mathrm{mod}\ \pi)}\Bigg) = \pm1.$

Ainsi, $T'(\xi_j) = \pm\dfrac{n}{\sqrt{1-\xi_j^2}}$, ce qui conclut.

7. Montrer $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{\xi_1,\dots,\xi_n\}, T_n'(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{T(x)}{x-\xi_j}$.

   Il suffit d'appliquer la question 2c au polynôme T_n' (de degré $n-1$), en simplifiant les deux occurrences de $T_n'(\xi_j)$ apparaissant dans la somme : avec les noeuds ξ_j, le polynôme de Čebyšëv T joue parfaitement le rôle de Ω.

Partie IV. Un théorème de Schur (1919).

Dans cette partie, on fixe un polynôme $S \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant $\forall x \in [-1,1]\,, \sqrt{1-x^2}\,|S(x)| \leqslant 1$.

L'objectif est d'en déduire $\forall x \in [-1,1]\,, |S(x)| \leqslant n$. Soit donc $x \in [-1,1]$.

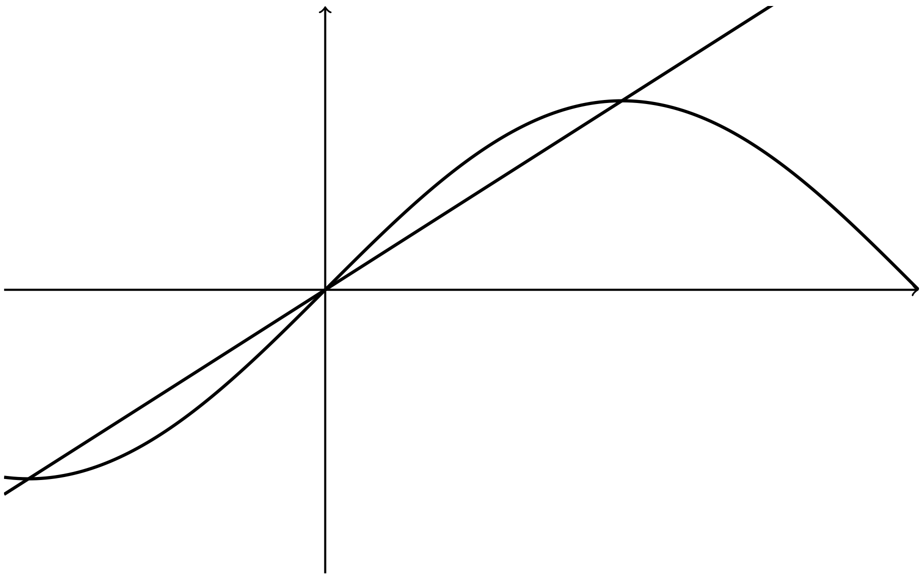
8. À l'aide d'une inégalité de concavité du sinus, montrer $\forall x \in [-\xi_1,\xi_1]\,, |S(x)| \leqslant n$.

   Soit $x \in [-\xi_1,\xi_1]$. On peut donc trouver $\theta \in \left[\dfrac{1}{2n}\pi, \dfrac{2n-1}{2n}\pi\right]$ tel que $x = \cos(\theta)$.

   L'hypothèse de l'énoncé donne alors

$$\begin{aligned}
|S(x)| &\leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant \frac{1}{\sin(\theta)} \\
&\leqslant \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \qquad \textit{car } \forall\theta \in \left[\frac{1}{2n}\pi, \frac{2n-1}{2n}\pi\right], \sin(\theta) \geqslant \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \\
&\leqslant n,
\end{aligned}$$

   la dernière inégalité étant obtenue grâce à l'inégalité $\forall\theta \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right], \sin(x) \geqslant \dfrac{2}{\pi}x$, inégalité entre la fonction concave $\sin_{|[0,\pi/2]}$ et sa sécante.



Dans la suite, on fixe $x \in [\xi_1, 1]$ (le cas symétrique $x \in [-1, \xi_n]$ est analogue, donc on ne le détaillera pas ici, mais on pourra utiliser le résultat pour tout $x \in [-1, 1]$ dans la suite du problème).

9. On fixe un nombre réel m tel que $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\left|\dfrac{S(\xi_j)}{T_n'(\xi_j)}\right| \leqslant m$. Montrer $|S(x)| \leqslant m\, T_n'(x)$.

   On va appliquer la question 2c au polynôme S. *Pour ce faire, commençons par remarquer que la factorisation* $T = \underbrace{\mathrm{coeff}_n(T)}_{>0} \displaystyle\prod_{j=1}^{n} (X - \xi_j)$, *conséquence des faits rappelés à propos du polynôme de Čebyšëv, montre que* T *prend des valeurs positives à partir de sa racine maximale* ξ_1. *Ainsi,*

   $$S(x) = \sum_{j=1}^{n} S(\xi_j)\, \frac{T(x)}{(x - \xi_j)\, T'(\xi_j)} \qquad \textit{donc} \qquad |S(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left|\frac{S(\xi_j)}{T'(\xi_j)}\right|}_{\leqslant m} \underbrace{\frac{T(x)}{x - \xi_j}}_{\geqslant 0}$$
   $$\leqslant m \sum_{j=1}^{n} \frac{T(x)}{x - \xi_j} = m\, T_n'(x),$$

   d'après la question 7.

10. En déduire $|S(x)| \leqslant n$.

    On commence à remarquer que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

    - $|S(\xi_j)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1 - \xi_j^2}}$ *par hypothèse ;*
    - $\left|T_n'(\xi_j)\right| = \dfrac{n}{\sqrt{1 - \xi_j^2}}$ *d'après la question 6c.*

    Cela montre donc $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\left|\dfrac{S(\xi_j)}{T_n'(\xi_j)}\right| \leqslant \dfrac{1}{n}$ *: on peut appliquer la question précédente avec* $m = \dfrac{1}{n}$.

    Ainsi, $|S(x)| \leqslant \dfrac{1}{n}\left|T'(x)\right| \leqslant n$ *d'après la question 6b.*

Partie V. Inégalités de Bernstein (1912) et de Markov (1890).

11. Soit $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathbb{R}$ et $g : t \mapsto \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \sin(kt)$ une fonction trigonométrique impaire.

    (a) Montrer qu'il existe $S \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \sin(t)\, S\big(\cos(t)\big)$.

    On reprend les notations usuelles : on note $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *la suite des polynômes de Čebyšëv.*

    Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ *et tout* $t \in \mathbb{R}$*, on a*

    $$\sin(kt) = \frac{1}{k} \sin(t)\, T_k'\big(\cos(t)\big) \qquad \textit{(d'après la question 6a)}$$

    donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$*,*

    $$g(t) = \sin(t)\, S\big(\cos(t)\big), \qquad \textit{où} \quad S = \sum_{k=1}^{n} \frac{T_k'}{k} \in \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

    (b) En déduire que si $\forall t \in \mathbb{R}, |g(t)| \leqslant 1$, alors $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \left| \dfrac{g(t)}{\sin(t)} \right| \leqslant n$.

    Le polynôme $S \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ *construit à la question précédente vérifie notamment*

    $$\forall t \in [0, \pi]\,, \underbrace{\big|\sin(t)\, S\big(\cos(t)\big)\big|}_{=|g(t)|} \leqslant 1$$

    d'où l'on déduit

    $$\forall x \in [-1, 1]\,, \sqrt{1 - x^2}\, |S(x)| \leqslant 1.$$

    D'après le théorème de Schur, on a donc $\forall x \in [-1, 1]\,, |S(x)| \leqslant n$.

    Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$*,*

    $$\left| \frac{g(t)}{\sin(t)} \right| = |S(t)| \leqslant n.$$

12. Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ et $f : \theta \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cos(k\theta) + \sum_{k=1}^{n} \mu_k \sin(k\theta)$.

    Montrer l'*inégalité de Bernstein trigonométrique* : si $\forall \theta \in \mathbb{R}, |f(\theta)| \leqslant 1$, alors $\forall \theta \in \mathbb{R}, |f'(\theta)| \leqslant n$.

    Indication. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, on pourra s'intéresser à la fonction $g_\theta : t \mapsto \dfrac{f(\theta + t) - f(\theta - t)}{2}$.

    On suit l'indication. Soit $\theta \in \mathbb{R}$*. On pose* $g_\theta : t \mapsto \dfrac{f(\theta + t) - f(\theta - t)}{2}$*. Un calcul direct à l'aide des formules de trigonométrie pour* $\cos(p) - \cos(q)$ *et* $\sin(p) - \sin(q)$ *en donne une expression alternative : pour tout* $t \in \mathbb{R}$*,*

    $$g_\theta(t) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k \sin(kt) \cos(k\theta) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sin(kt) \sin(k\theta) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \sin(kt),$$

    si l'on pose, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\sigma_k = \mu_k \cos(k\theta) - \lambda_k \sin(k\theta)$.

La fonction g_θ *vérifie bien* $\forall t \in \mathbb{R}, |g_\theta(t)| \leqslant 1$ *par l'inégalité triangulaire. D'après la question précédente, on a donc*

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \left|\frac{f(\theta+t) - f(\theta-t)}{2\sin(t)}\right| \leqslant n.$$

Comme $\sin(t) \underset{t \to 0}{\sim} t$*, le quotient à l'intérieur de la valeur absolue converge vers* $f'(\theta)$ *quand* $t \to 0$*. Par passage à la limite dans les inégalités larges, on en déduit* $|f'(\theta)| \leqslant n$*.*

Remarque. *Cette bonne idée est due au mathématicien hongrois Lipót Fejér (1880-1959) : c'est* l'astuce (Kunstgriff) de Fejér.

13. Soit maintenant $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in [-1, 1], |P(x)| \leqslant 1$.

    (a) Montrer l'*inégalité de Bernstein algébrique* : $\forall x \in [-1, 1], \sqrt{1-x^2}\left|P'(x)\right| \leqslant n$.

    Par linéarisation, la fonction $f : \theta \mapsto P\big(\cos(\theta)\big)$ *peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des* $\cos(k\theta)$ *et* $\sin(k\theta)$*, comme dans la question précédente.*

    L'hypothèse $\forall x \in [-1, 1], |P(x)| \leqslant 1$ *donne immédiatement* $\forall \theta \in \mathbb{R}, |f(\theta)| \leqslant 1$*, si bien que l'inégalité de Bernstein trigonométrique donne l'inégalité* $\forall \theta \in \mathbb{R}, |f'(\theta)| \leqslant n$*, qui se retraduit en* $\forall \theta \in \mathbb{R}, \left|\sin(\theta)\, P'\big(\cos(\theta)\big)\right| \leqslant n$*.*

    Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$*. On peut trouver* $\theta \in [0, \pi]$ *tel que* $x = \cos(\theta)$*. D'après la discussion précédente, on en déduit que*

    $$\sqrt{1-x^2}\left|P'(x)\right| = \underbrace{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}}_{=\sin\theta \geqslant 0}\left|P'\big(\cos(\theta)\big)\right| = \left|\sin(\theta)\, P'\big(\cos(\theta)\big)\right| \leqslant n.$$

    (b) En déduire l'*inégalité de Markov* : $\forall x \in [-1, 1], \left|P'(x)\right| \leqslant n^2$.

    Comme $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$*, il suffit d'appliquer une fois de plus le théorème de Schur, cette fois-ci au polynôme « renormalisé »* $\dfrac{1}{n}P'$*.*