Quatrième composition de mathématiques

Durée : *une centaine de minutes.*

*Les documents, calculatrices, etc. sont **interdits**, à l'exception du formulaire de développements limités.*

Comme d'habitude – encore plus que d'habitude – le sujet est violemment trop long ! Privilégiez la qualité à la quantité, et ne négligez pas les exercices.

Consignes générales de présentation

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci d'encadrer ou de souligner vos résultats.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.*
- *Les parties trop difficiles à lire de votre copie ne seront pas lues.*

Exercice 1

Soit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $x_{n+1} = x_1$.

Montrer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} \geqslant n$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0$.

Problème. Contrôle uniforme de la dérivée.

Dans tout l'énoncé, on fixe un entier $n \geqslant 1$.

Partie I. Interpolation de Lagrange : questions de cours et compléments.

1. Soit $x_1 < \cdots < x_n$ des nombres réels.
   (a) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Rappeler sans démonstration un polynôme L_j de degré $n-1$ tel que
   $$\forall k \in [\![1, n]\!], L_j(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
   (b) Montrer $\forall S \in \mathbb{R}_{n-1}[X], S = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j L_j$, après avoir remplacé les λ_j par les nombres réels (dépendant de S) appropriés.
2. Soit $\Omega \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n dont $x_1, \ldots, x_n$ sont racines. On note α son coefficient dominant.
   (a) Déterminer la décomposition de Ω en facteurs irréductibles.
   (b) Démontrer soigneusement $\Omega' = \alpha \sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{k \in [\![1,n]\!] \\ k \neq j}} (X - x_k)$.
   (c) En déduire
   $$\forall S \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}, S(x) = \sum_{j=1}^{n} S(x_j) \frac{\Omega(x)}{(x - x_j)\, \Omega'(x_j)}.$$

Partie II. Une observation de Dimitriĭ Ivanovič Mendeleev.

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $P = aX^2 + bX + c$. Soit $m \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in [-1, 1], |P(x)| \leqslant m$.

3. Montrer $\forall x \in [-1, 1], |P'(x)| \leqslant \max(|P'(-1)|, |P'(1)|)$.
4. Trouver $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ (ne dépendant pas de P) tels que $P'(1) = \lambda P(-1) + \mu P(0) + \nu P(1)$.
5. En déduire que $\forall x \in [-1, 1], |P'(x)| \leqslant 4m$.

> *"If you were a chemist and found a pretty theorem like this, you would want to tell it to a mathematician, and that is just what Mendeleev did–he told it to A. A. Markov.* [*]
> *If you are a mathematician and a chemist tells you a nice result about quadratic polynomials, you naturally want to generalize it to polynomials of degree n, and that is just what Markov did."* [†]

La fin du sujet explore la généralisation du résultat de Mendeleev à tous les polynômes, en suivant une démonstration due à Issai Schur (1875-1941).

*. Andreĭ Andreevič Markov, dont le frère Vladimir et le fils Andreĭ furent aussi mathématiciens. Vladimir a d'ailleurs généralisé le théorème dont il est question ici, qui est donc parfois appelé *l'inégalité des frères Markov.*

†. Ralph P. Boas, *Extremal problems for polynomials*.

Partie III. Complements sur les polynômes de Čebyšëv.

On rappelle qu'il existe un polynôme $T = T_n$ de degré n et de coefficient dominant strictement positif tel que $\forall\theta \in \mathbb{R}, T\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta)$. Il possède n racines, que l'on range par ordre **décroissant** :

$$(\xi_j)_{j=1}^n = \left(\cos\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right)\right)_{j=1}^n \quad : \qquad \xi_n = \cos\left(\frac{2n-1}{2n}\pi\right) < \cdots < \xi_2 = \cos\left(\frac{3}{2n}\pi\right) < \xi_1 = \cos\left(\frac{1}{2n}\pi\right)$$

appartenant toutes à $]-1,1[$.

6. (a) Montrer que $\forall\theta \in \mathbb{R}, \sin(\theta)\, T'\big(\cos(\theta)\big) = n\, \sin(n\theta)$.
   (b) En déduire $\forall x \in [-1,1]\,, \big|T'(x)\big| \leqslant n^2$.
   (c) Montrer $\forall j \in [\![1,n]\!], \big|T'(\xi_j)\big| = \dfrac{n}{\sqrt{1-\xi_j^2}}$.
7. Montrer $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\xi_1, \dots, \xi_n\}, T_n'(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{T(x)}{x-\xi_j}$.

Partie IV. Un théorème de Schur (1919).

Dans cette partie, on fixe un polynôme $S \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant $\forall x \in [-1,1]\,, \sqrt{1-x^2}\,|S(x)| \leqslant 1$.

L'objectif est d'en déduire $\forall x \in [-1,1]\,, |S(x)| \leqslant n$. Soit donc $x \in [-1,1]$.

8. À l'aide d'une inégalité de concavité du sinus, montrer $\forall x \in [-\xi_1, \xi_1]\,, |S(x)| \leqslant n$.

Dans la suite, on fixe $x \in [\xi_1, 1]$ (le cas symétrique $x \in [-1, \xi_n]$ est analogue, donc on ne le détaillera pas ici, mais on pourra utiliser le résultat pour tout $x \in [-1,1]$ dans la suite du problème).

9. On fixe un nombre réel m tel que $\forall j \in [\![1,n]\!], \left|\dfrac{S(\xi_j)}{T_n'(\xi_j)}\right| \leqslant m$. Montrer $|S(x)| \leqslant m\, T_n'(x)$.
10. En déduire $|S(x)| \leqslant n$.

Partie V. Inégalités de Bernstein (1912) et de Markov (1890).

11. Soit $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathbb{R}$ et $g : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sigma_k \sin(kt)$ une fonction trigonométrique impaire.
    (a) Montrer qu'il existe $S \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = \sin(t)\, S\big(\cos(t)\big)$.
    (b) En déduire que si $\forall t \in \mathbb{R}, |g(t)| \leqslant 1$, alors $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \left|\dfrac{g(t)}{\sin(t)}\right| \leqslant n$.
12. Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ et $f : \theta \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cos(k\theta) + \sum_{k=1}^{n} \mu_k \sin(k\theta)$.

    Montrer l'*inégalité de Bernstein trigonométrique* : si $\forall\theta \in \mathbb{R}, |f(\theta)| \leqslant 1$, alors $\forall\theta \in \mathbb{R}, |f'(\theta)| \leqslant n$.

    Indication. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, on pourra s'intéresser à la fonction $g_\theta : t \mapsto \dfrac{f(\theta+t) - f(\theta-t)}{2}$.
13. Soit maintenant $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in [-1,1]\,, |P(x)| \leqslant 1$.
    (a) Montrer l'*inégalité de Bernstein algébrique* : $\forall x \in [-1,1]\,, \sqrt{1-x^2}\,\big|P'(x)\big| \leqslant n$.
    (b) En déduire l'*inégalité de Markov* : $\forall x \in [-1,1]\,, \big|P'(x)\big| \leqslant n^2$.