Quatrième composition de mathématiques

Durée : *3 heures.*

Toute sortie est interdite pendant les dix dernières minutes.

*Les documents, calculatrices, etc. sont **interdits**.*

Consignes générales de présentation

La présentation de la copie est prise en compte dans l'évaluation.

- *Ne composez pas sur la première page, ce qui me permettra d'écrire mes commentaires.*
- *Merci d'encadrer ou de souligner vos résultats.*
- *Numérotez vos copies doubles, et rendez-les dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.*
- *Les parties trop difficiles à lire de votre copie ne seront pas lues.*

Exercice 1

Déterminer si le polynôme $P = X^5 - X - 1$ possède des racines complexes multiples.

Exercice 2

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ trois nombres complexes non nuls tels que $a + b + c = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 0$.

1. Calculer le polynôme $P = (X - a)(X - b)(X - c)$.
2. En déduire $|a| = |b| = |c|$.

Exercice 3

Décomposer $P = X^9 + X^6 + X^3 + 1$ en produit de polynômes irréductibles, dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4. Équation (matricielle) de Fermat.

On note $M_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices 2×2 dont les quatre coefficients sont des entiers relatifs.

Soit $n \geqslant 2$. Dans cet exercice, on cherche des solutions à l'équation $(F_n) : A^n + B^n = C^n$, sous la forme d'un triplet $(A, B, C) \in M_2(\mathbb{Z})^3$, sous certaines conditions de non-trivialité.

1. (a) Pour $i, j \in \{1, 2\}$, calculer la puissance $E_{i,j}^n$ de la matrice élémentaire $E_{i,j}$.
   (b) En déduire que (F_n) possède une solution $(A, B, C) \in M_2(\mathbb{Z})^3$, avec A, B et C non nulles.
2. **Compléments sur le déterminant** 2×2.
   (a) Montrer $\forall A, B \in M_2(\mathbb{R}), \text{dét}(AB) = \text{dét}(A)\ \text{dét}(B)$.
   (b) **Théorème de Cayley-Hamilton pour les matrices** 2×2. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\delta \in \mathbb{R}$ (que l'on déterminera) tel que $A^2 - \text{tr}(A)\, A = \delta\, I_2$.

Dans la suite de l'exercice, on note $GL_2(\mathbb{Z}) = \left\{A \in M_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, \text{dét}\, A \in \{-1, 1\}\right\}$.

3. Montrer que $GL_2(\mathbb{Z})$ est stable par produit et par passage à l'inverse.
4. (a) Déterminer toutes les matrices triangulaires $T \in M_2(\mathbb{Z})$ telles que $T^2 = I_2$.
   (b) En déduire qu'il existe $A, B \in GL_2(\mathbb{Z})$ telles que $A^2 = B^2 = I_2$ et $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (c) On suppose n impair. Montrer que (F_n) possède une solution $(A, B, C) \in GL_2(\mathbb{Z})^3$.
5. Le but de cette question est de montrer que (F_6) ne possède pas de solution $(A, B, C) \in GL_2(\mathbb{Z})^3$. Le théorème de Cayley-Hamilton (question 2b) sera utile.

   On note $\mathscr{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, a, d \text{ impairs et } b, c \text{ pairs} \right\}$.

   (a) Soit $M \in GL_2(\mathbb{Z})$ telle que $\text{tr}(M)$ soit paire. Montrer que $M^2 \in \mathscr{E}$.
   (b) Soit $M \in GL_2(\mathbb{Z})$. Montrer que $\text{tr}(M^3)$ est paire.
   (c) Conclure.

Exercice 5

Le but de cet exercice est de déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2+1) = P^2+1$. $(*)$

On note $Q = X^2+1$, si bien que la relation $(*)$ s'écrit également $P \circ Q = Q \circ P$.

On note enfin

$$\mathscr{P} = \left\{ A \in \mathbb{R}[X] \,\middle|\, A(-X) = A \right\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{I} = \left\{ B \in \mathbb{R}[X] \,\middle|\, B(-X) = -B \right\}$$

les ensembles des polynômes *pairs* et *impairs*, respectivement.

1. Soit $R \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique couple $(A, B) \in \mathscr{P} \times \mathscr{I}$ tels que $R = A + B$.
2. Soit $B \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $B \in \mathscr{I}$ si et seulement s'il existe $A \in \mathscr{P}$ tel que $B = X\,A$.
3. Soit $A \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $A \in \mathscr{P}$ si et seulement s'il existe $\widetilde{A} \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = \widetilde{A}(X^2)$.
4. (a) Soit $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que R^2 soit un polynôme pair. Montrer $R \in \mathscr{P} \cup \mathscr{I}$.
   (b) Est-il vrai qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le carré est une fonction paire est nécessairement paire ou impaire ?

Dans la suite de l'exercice, on fixe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $(*)$.

5. Montrer $P \in \mathscr{P} \cup \mathscr{I}$.
6. On suppose $P \in \mathscr{I}$, et on définit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_n^2 + 1$.

   Déterminer la suite $\big(P(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire $P = X$.
7. On suppose $P \in \mathscr{P}$.
   (a) Montrer qu'il existe un polynôme $P^{\langle 1\rangle}$ tel que $P = P^{\langle 1\rangle} \circ Q$.
   (b) Montrer que $P^{\langle 1\rangle}$ vérifie $P^{\langle 1\rangle} \circ Q = Q \circ P^{\langle 1\rangle}$.
8. Conclure.